



제1장 확률과 확률분포

제2장 통계적 검정 및 추정

제3장 상관분석 및 회귀분석

제4장 샘플링검사

제5장 관리도

행운은 100% 노력한 뒤에
남는 것이다!
- 랭스턴 콜만 -

제3장 상관분석 및 회귀분석

1. 상관·회귀분석 개요

1.1 상관·회귀분석의 개념

- * 금속의 성분과 항장력 또는 항장력과 연신률, 소둔온도와 금속의 경도 등과 같이 만약 한쪽의 측정치가 변하면 다른 측정치가 이것에 따라 변화하는 관계가 있을 때 이들 사이에는 “상관이 있다.”고 말하며, 상관관계를 해석하는 방법을 상관분석이라 한다.
- * 상관분석은 X, Y 다 같이 랜덤하게 변하는 확률변수로서 2변량 정규분포를 하는 것이 전제로 되어 있다. 따라서 X 가 확률변수가 아닐 경우, 예를 들면 온도를 100°C , 110°C , 120°C , ...와 같이 지정하여 변화시키고, 이때의 반응생성물의 수확량을 측정하여, 이 온도와 수확량과의 관계를 문제로 삼을 경우에는, X 가 랜덤하게 변하는 확률변수가 아니므로 상관분석을 적용하는 것은 적절하지 못하다. 이와 같이 X 의 값을 알고 있는 확정수일 때에는 회귀분석으로 취급한다.

1.2 상관·회귀분석의 목적

- * 품질관리에서는 다음의 목적 때문에 상관·회귀가 사용된다.
 - ① 특성과 특성간의 상관관계, ② 대용 관리특성의 발견
 - ③ 특성과 요인간의 관계, ④ 층별하여 상관을 취함으로써 교호작용 발견 등
- * 상관과 회귀의 종국 목적은 변수 x 로부터 변수 y 를 추정하는 데 있다.
- * 상관·회귀의 공통점은 변수들간의 관계를 규명하는 데 쓰이는 것이며, 차이점은 회귀는 통계적 모형을 구축하고 그 모형으로부터 미래값을 예측하는 데 활용된다는 데 있다.

2. 상관분석

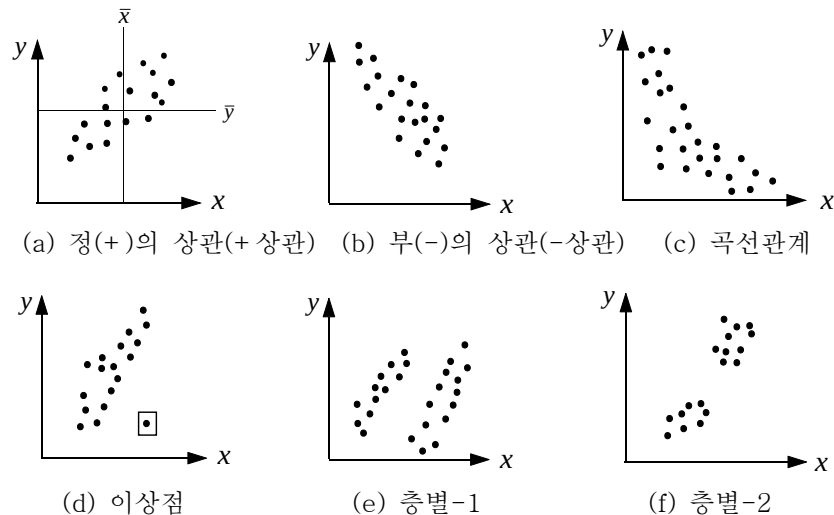
2.1 상관분석의 순서

- * 상관분석은 다음의 순서에 의해 이루어진다.
 - ① 산점도(산포도라고도 함)를 그린다.
 - ② 상관계수를 계산한다. (상관계수= r)
 - ③ 상관계수의 유의성에 대한 검정 및 추정을 한다.
 - ④ 유의이면 x 에 대한 y 의 회귀선을 구한다.
 - ⑤ 결정계수(기여율)을 구한다. [결정계수(기여율)= r^2]

2.2 상관분석을 위한 산점도의 작성

2.2.1 상관·회귀의 기초로서의 산점도

* 2변량 사이의 상관관계를 알기 위하여 2개의 변량 x, y 를 그래프에 타점하여 2개의 변량을 각자 세로축과 가로축에 잡아 측정치를 타점하여 [그림 3.1]과 같이 작성한 것을 산점도 (scatter diagram)라고 한다.



[그림 3.1] 산점도

* 산점도를 작성하는 방법은 제1장의 1항 데이터정리법에서 7가지 QC기초수법 중 산점도 항목을 참조바랍니다.

2.2.2 산점도를 그린 후 검토사항

* 산점도를 그린 후에 검토하여야 할 사항은 다음과 같은 것들이다.

① 점들이 산재해 있는 모양으로부터 x 와 y 사이에 관계가 있을 듯한가에 대해 검토한다.
또한 양(positive) 상관인가 음(negative) 상관인가를 알아 본다. [그림 3.1의 (a)와 (b)]

② x 와 y 가 직선관계인가 곡선관계인가를 살펴본다.

[그림 3.1]의 (c)처럼 곡선관계인 경우에는 상관계수를 구하는 것은 의미가 없고, 이와 같은 경우는 곡선회귀분석을 하여야 한다. 회귀선이 2차식이면 $r = 0$ 이다.

③ 이상한 데이터가 없나를 확인한다.

산점도에서 이상점의 발생은 데이터의 수집시 다른 모집단의 시료가 혼입되었거나, 측정이나 계산이 잘못되었거나, 데이터의 기입 등에 착오가 있는 것이다. 이와 같은 이상점이 발견되면 원인을 규명하여 수정하여 주도록 한다.

④ 점들이 뚜렷하게 두 개 또는 그 이상으로 층별되는 경우가 있는가 검토한다.

[그림 3.1]의 (e)처럼 두 개의 층으로 나누어지는 경우에는 두 개의 모집단으로부터 얻어진 두 개의 시료가 섞여 있는 것이므로 두 개의 서로 다른 시료로 취급하여야 한다.

2.3 표본상관계수 r 을 구함

- * 상관계수는 두 변수간의 선형(직선) 관계가 존재하는지 알아보는 계수이다. 회귀분석과 유사하지만 인과관계에 대한 분석은 아니다.
- * 두 확률변수 X, Y 에 대하여 n 개의 데이터 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ 이 얻어졌을 때 그 표본(또는 시료)상관계수(sample correlation coefficient)는 다음과 같이 정의된다.

$$r = \frac{S_{(xy)}}{\sqrt{S_{(xx)}S_{(yy)}}} \quad (3.1)$$

$$\text{여기서, } S_{(xx)} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}$$

$$S_{(yy)} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n}$$

$$S_{(xy)} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{(\sum x_i)(\sum y_i)}{n}$$

- * 점들이 직선에 모여 있으면 상관계수는 커진다. 상관계수의 부호가 양이면 한 변수의 값이 커질수록(작아질수록) 다른 변수의 값도 커짐(작아짐)을 의미한다.
- * 표본의 크기가 커지면 상관계수의 값이 커지며, 상관계수의 값이 얼마 이상이어야 한다는 기준은 없으므로, 가설검정에 의한 유의확률(P value)을 계산하도록 한다.
- * 상관계수에 대해 다음 사항을 특히 주의하도록 한다.
 - ① 상관계수는 두 변수간의 선형관계를 알아보는 것이다. 2차관계의 상관계수는 0이다.
 - ② 상관계수는 점들이 직선에 모여 있는 정도를 나타내는 지표이지 직선의 기울기 크기를 나타내는 것이 아니다.
- * 표본상관계수가 갖는 몇 가지 성질을 살펴보면 다음과 같다.
 - ① r 의 범위는 $-1 \leq r \leq 1$ 이다.
 - ② r 의 값은 두 확률변수 X, Y 간의 선형관계(linear relationship)를 나타내는 척도로서 [그림 3.1]의 (a)의 경우는 $0 < r < 1$ 이고 (b)의 경우는 $-1 < r < 0$ 이 된다.
 $r = \pm 1$ 인 경우는 모든 점이 기울기가 영이 아닌 일직선상에 놓이게 된다.
 - ③ 만약 x 가 $ax+b$ 로 바뀌고, y 가 $cy+d$ 로 바뀌어도 a 와 c 의 부호가 같으면 r 의 값에는 변함이 없다. 따라서 계산의 편의상 수치변환(단, $h > 0, g > 0$ 임)

$$X = (x - x_0) \times h, \quad Y = (y - y_0) \times g$$

을 하여도 x, y 간의 상관계수는 X, Y 의 상관계수와 동일하다. 즉,

$$r = \frac{S_{(xy)}}{\sqrt{S_{(xx)}S_{(yy)}}} = \frac{\frac{1}{hg}S_{(XY)}}{\sqrt{\frac{1}{h^2}S_{(XX)} \cdot \frac{1}{g^2}S_{(YY)}}} = \frac{S_{(XY)}}{\sqrt{S_{(XX)}S_{(YY)}}}$$

여기서 X, Y 는 확률변수를 나타내는 대문자의 의미로 사용한 것이 아니라 x, y 의 수치 변환된 값을 나타내고 있다.

2.4 상관계수 유의성 검정 및 추정

2.4.1 상관계수의 유의성 검정

(1) 상관계수의 유의성 검정 ($\rho = 0$ 일 때)

적용	H_0	H_1	검정통계량	기각역
t 표	$\rho = 0$	$\rho \neq 0$	$t_0 = r\sqrt{n-2}/\sqrt{1-r^2}$	$ t_0 > t_{1-\alpha/2}(n-2)$
r 표	$\rho = 0$	$\rho \neq 0$	$r_0 = S_{(xy)}/\sqrt{S_{(xx)}S_{(yy)}}$	$ r_0 > r_{1-\alpha/2}(n-2)$
비고	$r = S_{(xy)}/\sqrt{S_{(xx)}S_{(yy)}}$, r 분포표의 값은 부록의 <부표 12> r 분포표 참조.			

* 이러한 상관계수의 유의성 검정으로 H_0 가 기각되면, 회귀선을 $\hat{y} - \bar{y} = b(x - \bar{x})$ 로 구할 수 있게 된다.

참조 수치변환에 의한 상관계수의 계산 방법

상관계수(r)을 구하기 위한 수치변환의 경우는 다음과 같은 방법으로 행한다.

$X = (x - x_0) \times h$, $Y = (y - y_0) \times g$ 로 변환하면, 변동(편차제곱합)은

$$S_{(XX)} = \sum X^2 - (\sum X)^2 / n, \quad S_{(YY)} = \sum Y^2 - (\sum Y)^2 / n$$

$$S_{(XY)} = \sum XY - (\sum X)(\sum Y) / n$$

이고, 이들을 원래의 값으로 환원시키기 위해 다음과 같이 계산한다.

$$S_{(xx)} = S_{(XX)} \times \frac{1}{h^2}, \quad S_{(yy)} = S_{(YY)} \times \frac{1}{g^2}, \quad S_{(xy)} = S_{(XY)} \times \frac{1}{hg}$$

(2) 상관계수의 유의성 검정 ($\rho = \rho_0$ 즉 $\rho \neq 0$ 일 때)

H_0	H_1	검정통계량	기각역
$\rho = \rho_0$	$\rho \neq \rho_0$	$U_0 = \sqrt{n-3} \left(\frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{1+r}{1-r} \right\} - \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{1+\rho_0}{1-\rho_0} \right\} \right)$	$ U_0 > u_{1-\alpha/2}$

2.4.2 상관계수에 관한 추정

(1) 두 확률변수 X 와 Y 간의 모상관계수 ρ 의 추정

* 두 확률변수 X , Y 간의 모상관계수 ρ 는 다음과 같다.

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

여기서 $\text{Cov}(X, Y) = \sigma_{xy}$, $V(X) = \sigma_x^2$, $V(Y) = \sigma_y^2$ 으로 바꿔 놓은 것이다.

* 이들의 시료에 의한 추정치는 각각

$$\hat{\sigma}_{xy} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1} = \frac{S_{(xy)}}{n-1}$$

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{S_{(xx)}}{n-1}, \quad \hat{\sigma}_y^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n-1} = \frac{S_{(yy)}}{n-1}$$

를 사용할 수 있으므로, ρ 의 점추정치는 다음과 같이 된다.

$$\hat{\rho} = \frac{\frac{S_{(xy)}}{n-1}}{\sqrt{\frac{S_{(xx)}}{n-1} \cdot \frac{S_{(yy)}}{n-1}}} = \frac{S_{(xy)}}{\sqrt{S_{(xx)} S_{(yy)}}} = r \quad (3.2)$$

(2) 모상관계수에 관한 신뢰구간의 추정 (대략 $n \geq 25$ 일 때)

* 상관계수의 분포에서 $Z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} = \tanh^{-1}(r)$ 로 정의되며, $E(Z)$ 값은 다음 식으로 구해진다.

$$E(Z) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\rho}{1-\rho} \right)$$

* Z 의 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간은 다음 식으로 된다.

$$\left. \begin{matrix} Z_U \\ Z_L \end{matrix} \right\} = Z \pm u_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{1}{n-3}} \quad (3.3)$$

구간상한 Z_U 와 구간하한 Z_L 에 대응하는 ρ_U, ρ_L 의 값이 모상관계수의 구간추정값이다.

* Z 값으로부터 ρ 를 추정하는 방법은 다음의 방법들이 있다.

(가) 방법 1 [$r = \tanh(Z)$ 이용]

* $Z = \tanh^{-1}(r)$ 이므로 $r = \tanh(Z)$ 이다. 따라서 $\hat{\rho} \approx r = \tanh(Z)$ 이 된다.

$$Z_U \rightarrow \rho_U \text{ 변환 : } \hat{\rho}_U \approx r_U = \tanh(Z_U)$$

$$Z_L \rightarrow \rho_L \text{ 변환 : } \hat{\rho}_L \approx r_L = \tanh(Z_L)$$

* 따라서 ρ 의 구간추정은 $\hat{\rho}_L \leq \rho \leq \hat{\rho}_U$ 로 구해진다.

(나) 방법 2 [$r = (e^{2Z} - 1)/(e^{2Z} + 1)$ 의 공식 사용]

* ρ 의 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간은 다음의 식으로 계산되는 것이 증명되어져 있다.

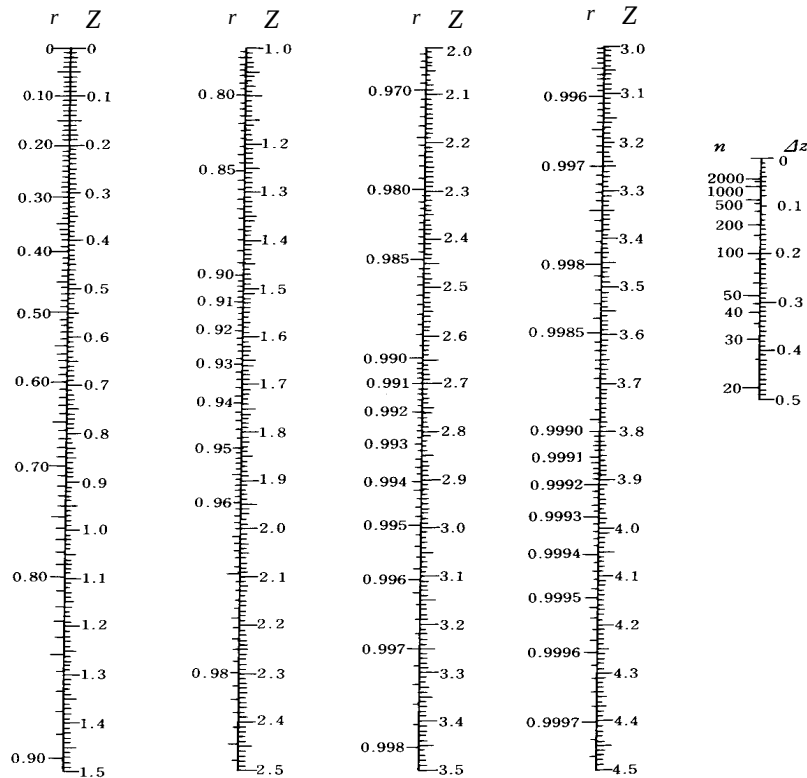
$$\hat{\rho}_L \approx r_L = \frac{e^{2Z_L} - 1}{e^{2Z_L} + 1} \quad (3.4)$$

$$\hat{\rho}_U \approx r_U = \frac{e^{2Z_U} - 1}{e^{2Z_U} + 1} \quad (3.5)$$

* 따라서 ρ 의 구간추정은 $\hat{\rho}_L \leq \rho \leq \hat{\rho}_U$ 로 구해진다.

(다) 방법 3 (Z 변환표에 의한 경우)

- ▶ 순서 1 : 시료상관계수 r 의 값을 Z 변환도표 상에서 찾는다.
- ▶ 순서 2 : 시료의 크기 n 에 대응하는 ΔZ 의 폭을 구한다.
- ▶ 순서 3 : 앞에서 Z 변환도표 위에서 잡은 r 의 값에서 상하에 ΔZ 의 폭을 주었을 때 얻어지는 상하의 두 점의 r 의 값이 신뢰구간의 하한 ρ_L 과 상한 ρ_U 의 추정값이 된다.



$$Z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} = \tan h^{-1}(r) \quad r = \tan h(Z) \quad \Delta Z = \frac{1.96}{\sqrt{n-3}}$$

[그림 3.2] Z 변환도표

2.5 x 에 대한 y 의 회귀선

- * x 에 대한 y 의 회귀선은 다음의 식으로 구한다.

$$\hat{y} - \bar{y} = b(x - \bar{x}) \quad (3.6)$$

- * 상기 식에서 회귀계수 b 는 다음 식으로 구한다.

$$b = \frac{S_{(xy)}}{S_{(xx)}} \quad (3.7)$$

- * 상기 b 의 식에서 $S_{(xx)}$ 와 $S_{(xy)}$ 는 다음의 식에서 구해진 값을 구하여 대입시킨다.

$$S_{(xx)} = \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}, \quad S_{(xy)} = \sum xy - \frac{\sum x \sum y}{n}$$

[참조] Y 에 대한 x 의 회귀선을 구할 경우

$$x - \bar{x} = b(y - \bar{y}) \quad [\text{여기서, 회귀계수 } b = S_{(xy)} / S_{(yy)}]$$

[참조] 수치변환에 의한 회귀식의 계산의 경우

위의 회귀선에서의 x 의 평균 $\bar{x}$ 와 Y 의 평균 $\bar{y}$, 회귀계수 b 의 값을 구할 때 계산의 단순화를 위해 $X = (x - x_0) \times h$, $Y = (y - y_0) \times g$ 에 의해 수치변환한 값에 의한 경우에는 다음의 식으로 계산한 값을 식 (3.6)에 대입시킨다.

$$\bar{x} = x_0 + \frac{\sum X}{n} \times \frac{1}{h}, \quad \bar{y} = y_0 + \frac{\sum Y}{n} \times \frac{1}{g}$$

2.6 결정계수(기여율) R^2

* 상관계수(r)에 의거하여 결정계수(기여율) R^2 은 다음 식에 의하여 구한다.

$$R^2 = (r)^2 = \left(\frac{S_{(xy)}}{\sqrt{S_{(xx)}S_{(yy)}}} \right)^2 \quad (3.8)$$

* 결정계수(기여율)의 의미는 총변동(**SST** : Sum of Squared Total) 중에서 기여율에 해당하는 수치가 회귀에 의하여 설명되는 변동(**SSR** : Sum of Squared Regression)을 의미하고, 나머지 값은 잔차변동(**SSE** : Sum of Squared Error)을 나타낸다.

$R^2 > 0.65$ 이면 회귀식이 자료를 설명하기에 좋다고 판정한다.

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST} \quad (3.9)$$

결정계수는 두 변수간의 선형관계 정도가 높으면(관측치들이 가까이 모여 있다는 것을 의미함) 결정계수는 1에 가까워 진다. 특히 단순회귀 모형에서 상관계수는 $r = \pm\sqrt{R^2}$ 이 성립한다.

3. 회귀분석

3.1 회귀분석의 개념

- * 상관분석에 의하여 2개의 특성간의 관계를 조사할 경우, 측정치 x 와 y 는 어느 것이나 랜덤하게 변하는 확률변수이어야 한다는 것이 전제로 되어 있음을 보았다.
- * 특성치간의 관계를 다룰 때는, 이런 경우에 한하는 것은 아니다. 예를 들면 반응생성물의 수율 Y 에 영향을 미친다고 생각하는 반응온도 x 를 80°C, 90°C, 100°C, ...와 같이 지정하여 실험을 행하여 x 와 Y 의 관계를 알고 싶을 경우와 같이 x 가 확정수, Y 가 변수일 경우에는 상관분석을 적용할 수는 없고 회귀분석을 이용하여야 한다.
- * 일반적으로 2개의 특성치 x 와 Y 에 함수관계가 있을 때, x 와 Y 간에 회귀관계가 있다고 말하고, 이 함수를 회귀함수, 또는 줄여서 회귀라고 한다.

- * 이 회귀를 취급하는 해석법이 회귀분석으로서, 이것도 2개의 특성간의 관계를 취급하는 單회귀분석과, 3개이상의 특성간의 관계를 취급하는 중(重)회귀분석이 있다. 또한 회귀분석에서는 곡선회귀에 관한 분석도 있다.

이와 같이 회귀분석에서는 1개의 특성 Y 를 다른 특성 x 로써 설명하는 것이 목적이며, 전자의 Y 를 종속변수(또는 목적변수, 결과변수), 후자의 x 를 독립변수(또는 설명변수, 원인변수)라고 한다.

3.2 직선회귀 (단회귀)

3.2.1 직선회귀의 기초 개념

- * 변수 x 를 독립변수, Y 를 종속변수라고 하면 그들의 관계는 다음과 같이 주어질 수 있다.

$$y = f(x)$$

- * x 에 대한 Y 의 변화가 규칙적인 경우의 함수는 다음 수식으로 표시된다. 즉,

$$y = a + bx$$

- * 이러한 변량 사이의 관계를 표시하는 방정식을 회귀방정식이라 하고, 이 방정식이 그리는 선을 회귀선(regression line)이라 한다.

- * 그것이 직선인 경우에는 직선회귀라 하고, 곡선인 경우에는 곡선회귀라 한다.

- * 변수 x 와 변량 Y 에 다음의 관계가 가정될 때 x, Y 를 직선회귀의 문제로 다룰 수 있다.

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$$

여기서, α : 상수($x_i = 0$ 일 때의 Y 의 값, 즉 Y 축의 절편)

β : 모회귀계수(기울기)

ε_i : 오차로서 평균치 0, 분산 σ^2 을 가지는 x_i 와는 독립된 변량

- * 지금 α 의 추정치를 a , β 의 추정치를 b 라고 하면 $y = a + bx_i$ 로 되나, 실제로는 오차가 있으므로 다음 식과 같이 된다.

$$y_i = a + bx_i + e_i$$

3.2.2 회귀직선의 추정

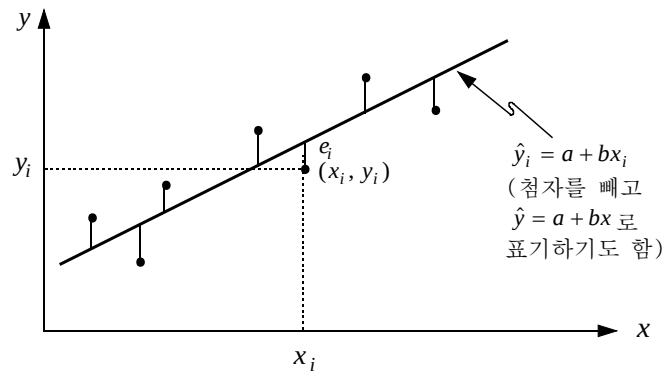
(1) 최소제곱법(MLS)에 의한 직선회귀 추정 ($y_i = a + bx_i + e_i$ 형)

- * 측정치 y_i 에서 일정수를 뺀 값인 편차의 제곱합

$$Q = \sum_{i=1}^n (y_i - a)^2 \quad (3.10)$$

을 생각하여 이 Q 를 최소로 하는 a 의 값은 $a = \bar{y}$ 가 될 때이다. 즉, Y 의 편차제곱의 합이

$$S_{yy} = \sum (y_i - \bar{y})^2 \text{ 이 된다.}$$



[그림 3.3] 직선회귀의 오차

- * 지금 a 대신에 y 와 x 사이의 관계식 $y = a + bx$ 를 생각할 때 실제로 여러 요인에 의해 오차(잔차) e_i 가 발생하므로 y 의 추정치인 $(a + bx_i)$ 를 사용하여 [그림 3.3]에서와 같이 측정치 y_i 와 y 의 추정치 $\hat{y}_i$ 의 차이인 오차 e_i 의 제곱의 합

$$S_{y \cdot x} = Q = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - (a + bx_i))^2$$

을 생각하여 이 Q 가 최소가 되게 하면 x 로부터 y_i 를 추정할 때 가장 산포가 적은 y_i 의 추정치를 얻는 직선을 구할 수 있다. 즉, Q 가 최소가 되게 하는 a, b 를 구하면 된다.

이 방법이 최소제곱법(MLS : Method of Least Squares)으로 회귀를 구하는 방법이다.

- * 이것을 구하자면 $\partial Q / \partial a$ 와 $\partial Q / \partial b$ 에 의한 편미분으로 얻어지는 식을 0이라 두고 a, b 에 대해 풀면 된다.

$$\left. \begin{aligned} \partial Q / \partial a &= -2 \sum \{y_i - (a + bx_i)\} = 0 \\ \partial Q / \partial b &= -2 \sum x_i \{y_i - (a + bx_i)\} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

이므로, 이 식을 정리하면

$$\left. \begin{aligned} \sum y_i &= na + b \sum x_i \\ \sum x_i y_i &= a \sum x_i + b \sum x_i^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

- * 이 두 개의 방정식(정규방정식이라고 함)으로부터 정수항 a 와 회귀계수 b 를 구하면

$$a = \frac{\sum y_i - b \sum x_i}{n} = \bar{y} - b\bar{x} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} b &= \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{\sum x_i y_i - (\sum x_i \sum y_i) / n}{\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 / n} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \\ &= \frac{S_{(xy)}}{S_{(xx)}} \end{aligned} \quad (3.14)$$

가 되므로

$$\hat{y}_i = a + bx_i \quad (3.15)$$

에 대입하여 추정 회귀방정식을 구한다. 여기서, a 는 $x=0$ 일 때의 y 의 값으로서 절편, 또 b 는 회귀선의 기울기를 나타내며 회귀계수라 한다.

* 이 추정 회귀방정식에서 a 를 제거하고 달리 표현하면 다음 식으로 변형될 수 있다.

$$\begin{aligned}\hat{y}_i &= a + bx_i \\ &= a + b\bar{x} + b(x_i - \bar{x}) \\ &= \bar{y} - b\bar{x} + b\bar{x} + b(x_i - \bar{x}) \\ &= \bar{y} + b(x_i - \bar{x})\end{aligned}$$

여기서 첨자 i 를 빼고 다음과 같은 변형한 식으로 나타낼 수도 있다.

$$\hat{y} - \bar{y} = b(x - \bar{x}) \quad (3.16)$$

여기서, $b, \bar{y}, \bar{x}$ 는 다음을 대입시킨다.

$$b = \frac{S_{(xy)}}{S_{(xx)}}, \quad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{n}, \quad \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

* 한편 추정 회귀식을 구하는 방법은 다음의 2가지가 있다.

① x 에 대한 y 의 추정 회귀선

$$\hat{y} - \bar{y} = b(x - \bar{x}) \quad (3.17)$$

위의 식을 정리하면 $\hat{y} = \bar{y} + b(x - \bar{x}) = a + bx$ 의 형태가 된다.

여기서 회귀계수 b 는 $b = S_{(xy)} / S_{(xx)}$ 이다.

② y 에 대한 x 의 추정 회귀선

$$\hat{x} - \bar{x} = b(y - \bar{y}) \quad (3.18)$$

위의 식을 정리하면 $\hat{x} = \bar{x} + b(y - \bar{y}) = a + by$ 의 형태가 된다.

여기서, $b = S_{(xy)} / S_{(yy)}$ 이다.

[참조] 상기 ①, ②에서 일반적으로 독립변수 x 를 가로축에, 종속변수 y 를 세로축에 취해 x 에 대한 y 의 회귀선에 대해 주로 생각한다.

[참조] 추정된(적합된) 회귀식의 성질

- ① $\sum e_i = 0$, 즉 오차의 합은 0이다.
- ② $\sum x_i e_i = 0$, 관측치 x_i 를 가중치로 한 오차의 가중합은 0이다.
- ③ $\sum \hat{y}_i e_i = 0$, 즉 예측치 $\hat{y}_i$ 를 가중치로 한 오차의 가중합은 0이다.
- ④ 적합된 회귀직선은 $(\bar{x}, \bar{y})$ 를 지난다.

(2) 최소제곱법(MLS)에 의한 회귀직선 추정 ($y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ 형)

* 단순회귀식의 적합의 경우로서 단순회귀의 경우에는 회귀선이 직선이 되므로 직선회귀라 부르고, 여기서 얻어지는 직선을 회귀직선이라고 부른다.

- * 두 변수 x 와 y 간의 n 개의 데이터 (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$ 에 관한 직선회귀 모형은 다음과 같은 가정 아래 표현된다.

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \quad (3.19)$$

여기서, $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ 이고 서로 독립

β_0, β_1 은 미지의 모수

x_i : i 번째 주어진 고정된 x 의 값, $i = 1, 2, \dots, n$

- * 미지의 모수인 β_0 와 β_1 의 추정은 최소제곱법(MLS : Method of Least Squares)에 의하여 구한다. 이 방법은 식 (3.19)의 오차 ε_i 의 제곱, 즉 편차제곱의 합

$$S = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_i (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2 \quad (3.20)$$

을 최소로 하는 β_0 와 β_1 을 구하는 방법이다.

- * 식 (3.20)의 오차제곱합을 최소로 하는 β_0 와 β_1 을 구하기 위하여 S 를 β_0 와 β_1 에 대하여 각각 편미분하여 다음의 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \beta_0} &= -2 \sum (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) \\ \frac{\partial S}{\partial \beta_1} &= -2 \sum x_i (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) \end{aligned}$$

- * 위의 편미분 값을 영으로 만드는 β_0 와 β_1 의 추정치를 $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ 으로 놓고 위의 식을 정리하면

$$\left. \begin{aligned} n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum x_i &= \sum y_i \\ \hat{\beta}_0 \sum x_i + \hat{\beta}_1 \sum x_i^2 &= \sum x_i y_i \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

을 얻게 되는데, 이 식을 정규방정식(normal equations)이라고 부른다.

- * 이 식을 풀어서 얻어진 $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ 을 최소제곱추정치(LSE : Least Squares Estimates)라고 부르고 이것을 풀면 다음과 같이 된다.

$$\left. \begin{aligned} \hat{\beta}_1 &= S_{(xy)} / S_{(xx)} \\ \hat{\beta}_0 &= \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

$$\text{여기서, } S_{(xx)} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 / n$$

$$S_{(xy)} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i) / n$$

- * 따라서 회귀직선의 추정식은 다음 식과 같다.

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i \quad (3.23)$$

* 이를 다르게 표현하면 $\bar{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{x}$ 의 관계를 이용하여 다음과 같이 나타내기도 한다.

$$\begin{aligned}\hat{y}_i &= (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{x}) + \hat{\beta}_1(x_i - \bar{x}) \\ &= (\bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} + \hat{\beta}_1 \bar{x}) + \hat{\beta}_1(x_i - \bar{x}) \\ &= \bar{y} + \hat{\beta}_1(x_i - \bar{x})\end{aligned}\quad (3.24)$$

* 첨자 i 를 빼고 회귀직선의 추정식은 다음과 같이 쓰기도 한다.

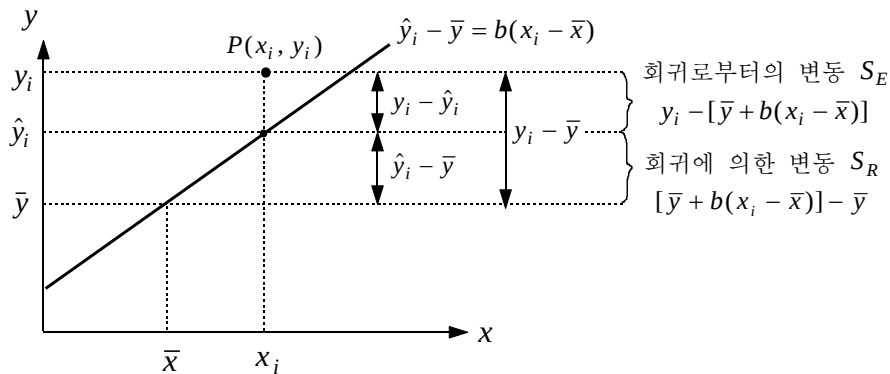
$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x \quad \text{또는} \quad \hat{y} = \bar{y} + \hat{\beta}_1(x - \bar{x}) \quad (3.25)$$

이는 $\hat{y} - \bar{y} = b(x - \bar{x})$ 와 동일한 방법이 된다.

3.2.3 분산분석법 (회귀계수 $\beta = 0$ 의 검정)

(1) 회귀에 의한 변동, 회귀로부터의 변동에 대한 개념

- * 회귀식에서의 회귀계수 β 가 0인지 아닌지를 분산분석으로 검정할 수 있다.
- * 분산분석이란 실험계획법의 개념의 하나로서 “데이터에 관한 편차제곱합(변동)을 몇 개의 의미를 갖는 편차제곱합으로 분산하고 분산된 각 편차제곱합으로부터 산출되는 불편분산의 차의 유의성 검정을 행하는 것”을 말한다.



[그림 3.4] 총편차($y_i - \bar{y}$)의 분해

* [그림 3.4]에서 임의의 점 $P(x_i, y_i)$ 와 $y = \bar{y}$ 와의 거리 $y_i - \bar{y}$ 는

$$y_i - \bar{y} = (\hat{y}_i - \bar{y}) + (y_i - \hat{y}_i) \quad (3.26)$$

과 같이 $\hat{y}_i$ 를 가감시켜 표시할 수 있다. 이 식에 회귀식인

$$\hat{y}_i - \bar{y} = b(x_i - \bar{x})$$

을 대입하면 다음 식으로 고쳐 쓸 수 있다.

$$y_i - \bar{y} = b(x_i - \bar{x}) + (y_i - \hat{y}_i) \quad (3.27)$$

* 위의 식의 제 1항은 ‘회귀관계로부터 설명되는 편차’이다. 제2항은 ‘회귀관계로 설명되지 않는 편차’ 혹은 잔차(residual, 오차라고도 함), 즉 회귀관계로부터 벗어난 것을 나타내며, 잔차는 e_i 로도 나타낸다.

* 위의 식의 양변을 제곱하여 i 에 대해 총합을 구하면 식 (3.28)과 같이 된다.

$$\begin{aligned}\sum_i (y_i - \bar{y})^2 &= \sum_i \{b(x_i - \bar{x}) + (y_i - \hat{y}_i)\}^2 \\ &= b^2 \sum_i (x_i - \bar{x})^2 + \sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2\end{aligned}\quad (3.28)$$

상기 식의 정리 과정에서 제외된 항목인 다음 식은 회귀의 성질을 이용한 것이다.

$$2b \sum (x_i - \bar{x})e_i = 2b[\sum x_i e_i - \bar{x} \sum e_i] = 2b(0 - 0) = 0$$

식 (3.28)의 우변은 y_i 의 $\bar{y}$ 로부터의 총변동이며, 우변의 제1항은 회귀에 의한 변동 S_R 을, 제2항은 회귀로부터의 변동(잔차변동) S_E 를 나타낸다.

* 따라서 식 (3.28)은 다음과 같이 변형시켜 볼 수 있다.

$$S_{(yy)} = b^2 S_{(xx)} + S_E = S_R + S_E \quad (3.29)$$

여기서 S_R 은 회귀에 의한 변동, S_E 는 회귀로부터의 변동을 나타내는데, S_E 는 S_{yx} 로 나타내기도 한다.

(2) 분산분석법

* 총변동의 분해에 따라 총변동(SST : Sum of Squared Total)은 회귀에 의한 변동(SSR : Sum of Squared Regression)과 회귀로부터 변동(오차변동, 잔차변동, SSE : Sum of Squared Error)으로 분해된다.

$$SST(S_{yy}) = SSR(S_R) + SSE(S_E) \quad (3.30)$$

* 이를 이용하여 단순회귀분석에서의 분산분석표에서와 같이 하여 분산분석을 실시한다.

3.3 단순회귀분석

3.3.1 단순회귀분석의 순서

* 단순회귀분석은 다음의 순서로 행한다.

- ① 산점도를 작성한다. ② 회귀의 유의성 검정을 한다.
- ③ 회귀선 $\hat{y} - \bar{y} = b(x - \bar{x})$ 을 구한다.
- ④ 모회귀계수 β 의 검정 및 추정을 한다. ⑤ 모회귀직선 η 를 추정한다.
- ⑥ 절편 α 의 검정 및 추정을 한다.

* 단순회귀(직선회귀) 분석의 기초분야에서는 ④, ⑤ 및 ⑥항은 생략되고 분석되기도 한다.

3.3.2 단순회귀분석

(1) 회귀분석을 위한 산점도의 작성

* 산점도를 작성 후 개략적으로 상관관계를 먼저 파악한다.

(2) 회귀의 유의성 검정

- ① 귀무가설 및 대립가설을 세운다. $H_0 : \beta = 0$, $H_1 : \beta \neq 0$
- ② 유의수준 α 를 정한다.
- ③ 분산분석표 작성에 의한 검정통계량의 값(F_0) 계산

요인	SS	DF	MS	F_0	$F_{1-\alpha}(v_R, v_E)$
R	$S_R = b^2 S_{(xx)} = \{S_{(xy)}\}^2 / S_{(xx)}$	1	$V_R = S_R / 1$	V_R / V_E	$F_{1-\alpha}(1, n-2)$
E	$S_E = S_{(yy)} - S_R$	$n-2$	$V_E = S_E / (n-2)$		
T	$S_{(yy)}$	$n-1$			

$$\text{단, } b = \frac{S_{(xy)}}{S_{(xx)}}, S_{(xx)} = \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}, S_{(yy)} = \sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n}, S_{(xy)} = \sum xy - \frac{(\sum x)(\sum y)}{n}$$

- ④ 기각역 설정. $F_0 > F_{1-\alpha}(1, n-2)$ 이면 H_0 기각
- ⑤ 판정. H_0 가 기각되면, 즉 모회귀계수 β 가 0이 아니므로 회귀선을 구한다.

(3) 회귀선을 구함

* 회귀선은 다음과 같이 구한다.

$$\hat{y}_i - \bar{y} = b(x_i - \bar{x}) \quad (3.31)$$

첨자 i 를 빼고 $\hat{y} - \bar{y} = b(x - \bar{x})$ 로 표기하기도 한다.

* 여기서, 수치변환에 의해 계산할 때에는

$$X = (x - x_0) \times h, Y = (y - y_0) \times g$$

로 수치변환한 경우 다음 식에 의해 구한 값을 대입하여 구한다.

$$\bar{x} = x_0 + \frac{\sum X}{n} \times \frac{1}{h}, \bar{y} = y_0 + \frac{\sum Y}{n} \times \frac{1}{g}, b = \frac{S_{(xy)}}{S_{(xx)}}$$

(4) 모회귀계수 β 의 검정 및 추정

(가) 검정의 기초 개념

* (3)항에서 b 의 값이 $b = S_{(xy)} / S_{(xx)}$ 에 의해 계산된 일정한 값으로 주어지나 b 는 y 의 선형 결합으로 된 통계량이기 때문에 분포를 가진다.

* 회귀계수 b 는 $E(b) = \beta$, $V(b) = \sigma_E^2 / S_{(xx)}$ 인 모평균과 모분산을 갖는 정규분포를 따르므로, $\hat{\sigma}_E^2 = V_E$ 의 관계로부터 σ_E^2 대신 V_E 를 대입한 다음의 식

$$t = \frac{b - E(b)}{\sqrt{V(b)}} = \frac{b - \beta}{\sqrt{V_E / S_{(xx)}}} \quad (3.32)$$

가 자유도 $\nu = n - 2$ 인 t 분포를 하는 것을 이용해 모회귀계수 β 의 검정 및 추정을 한다.

(나) 모회귀계수 β 의 검정

- ① 가설 설정. $H_0 : \beta = 0, H_1 : \beta \neq 0$
- ② 유의수준 α 를 정함
- ③ 검정통계량의 값(t_0) 계산

$$t_0 = \frac{b - \beta}{\sqrt{V_E / S_{(xx)}}} \quad (3.33)$$

- ④ 기각역 설정. $|t_0| > t_{1-\alpha/2}(\nu)$ 이면 H_0 기각
- ⑤ 판정. 기각역의 조건을 만족하면 H_0 가 기각되어 $\beta \neq 0$ 이므로, β 의 추정을 할 수 있다.

(다) 모회귀계수 β 의 추정

* $\beta \neq 0$ 의 결과가 나오면 다음 식으로 β 의 추정을 한다.

$$\hat{\beta} = b \pm t_{1-\alpha/2}(n-2) \sqrt{\frac{V_E}{S_{(xx)}}} \quad (3.34)$$

4. 품질경영기사 필기 [출제예상 엄선문제]

4.1 상관·회귀분석 개요

01 두 변량 사이의 관계의 정도를 재는 측도를 무엇이라 하는가?

- ㉠ 결정계수 ㉡ 회귀계수
㉢ 순위계수 ㉣ 상관계수

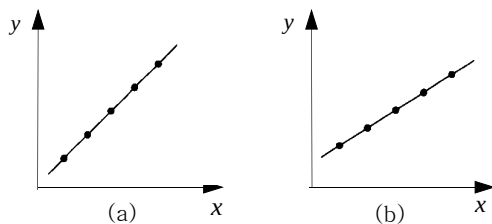
해설

㉣ 두 변량 사이에 상호간에 서로 영향을 미치는 관계는 상관관계이고, 독립변수 x 와 종속변수 y 의 관계는 회귀관계로 구분한다.

상관분석과 회귀분석 간의 차이점으로서, 상관분석은 2개의 특성 x 와 y 가 어느 것이나 랜덤하게 변하는 확률변수임을 전제로 하는 분석이고, 회귀분석은 x 가 확정수, y 가 랜덤하게 변하는 확률변수일 경우에 적용하는 분석이다.

4.2 상관분석

01 다음의 두 상관도에서 x, y 사이의 상관계수에 대한 크기를 비교한 것으로 옳은 것은?



- ㉠ (a)>(b) ㉡ (a)<(b)
㉢ (a)=(b) ㉣ 비교할 수 없다.

해설

㉣ 상관계수는 점이 직선 배열인 경우 기울기와 관계없이 +1, 혹은 -1값을 갖는다. (a), (b) 모두 양(+)의 기울기로서, $r=1$ 이다.

$r=\pm 1$ 인 경우는 모든 점이 기울기가 영이 아닌 일직선상에 놓이게 된다.

02 다음 설명 중 틀린 것은?

- ㉠ 결정계수는 상관계수의 제곱과 같다.
㉡ 공분산은 원 데이터의 측정 단위에 따라 달라진다.
㉢ 모상관계수의 구간추정은 z 변환하여 정규분포를 사용할 수 있다.
㉣ 상관계수 r 의 값이 0에 가까울수록 일정한 경향선으로부터의 산포는 작아진다.

해설

㉣ 상관계수 r 의 값이 0에 가까울수록 일정한 경향선으로부터의 산포는 커진다.

($r=0$ 이 되면, 무상관이 되어 일정한 경향선을 얻지 못한다.)

r 의 값은 두 확률변수 X, Y 간의 선형관계(linear relationship)를 나타내는 척도로서 양상관의 경우는 $0 < r < 1$ 이고, 음상관의 경우는 $-1 < r < 0$ 이 된다. $r=\pm 1$ 인 경우는 모든 점이 기울기가 영이 아닌 일직선상에 놓이게 된다.

03 $X = (x-10) \times 10$, $Y = (y-70) \times 100$ 으로 수치변환하여 X 와 Y 의 상관계수를 구했더니 0.5이었다. 이때 X 와 Y 의 상관계수는 얼마인가?

- ㉠ 0.005 ㉡ 0.05 ㉢ 0.5 ㉣ 5.0

해설

상관계수의 값은 수치변환 전과 후가 동일하다.

$$r_{xy} = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx} \cdot S_{yy}}} = \frac{S_{XY} / (10 \times 100)}{\sqrt{\left(\frac{S_{XX}}{10 \times 10}\right) \cdot \left(\frac{S_{YY}}{100 \times 100}\right)}} = \frac{S_{XY}}{\sqrt{S_{XX} \cdot S_{YY}}} = r_{XY} = 0.5$$

04 상관분석에 있어서 결정계수(r^2)와 상관계수(r)를 가장 올바르게 설명한 것은?

- ㉠ 결정계수는 측정치의 단위에 영향을 받지 않고 간단한 범위를 나타낸다.

- ㉔ 상관계수는 결정계수의 평방근이므로 해석상에는 차이가 없다.
- ㉕ 결정계수는 $-1 \leq r^2 \leq 1$ 의 범위를 갖는다.
- ㉖ 상관계수는 두 변수 간의 상관관계의 흐름과 상호의존적인 관계의 강도만을 설명해 준다.

해설

- ㉗ 결정계수 r^2 은 수치로 표현되며, 회귀직선의 기여율을 나타낸다.
- ㉘ 해석상에는 양자가 다른 의미를 갖는다.
결정계수 r^2 은 회귀직선의 기여율을 뜻한다.
- ㉙ 상관계수 r 에 대한 설명이다. $-1 \leq r \leq 1$

05 샘플 상관계수 r 은 Z 변환을 하면 근사적인 정규분포를 한다. 다음에서 Z 변환의 식을 옳게 표현한 값은?

- ㉗ $\sqrt{\frac{n-3}{2}} \ln \frac{1+r}{1-r}$ ㉘ $\frac{1}{2} \ln \frac{1-r}{1+r}$
- ㉙ $\frac{Z - \mu^2}{\sigma^2}$ ㉚ $\frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}$

해설

- ㉗ r 의 분포는 매우 복잡해서 ρ 의 신뢰한계를 r 에 의해 직접 계산하는 것은 곤란하므로 시료의 크기가 상당히 크고($n \geq 25$), ρ 의 절대치가 그다지 크지 않을 때 다음과 같이 r 의 Z 로의 Z 변환시킨다. R. A. Fisher에 의하면

$$Z = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+r}{1-r} \right) \quad [= \tanh^{-1}(r)]$$

로 정의되는 Z 값은 근사적으로 정규분포에 따른다.

- 06** 모상관계수 $\rho \neq 0$ 인 검정의 경우에는 $Z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}$ 로 Z 변환을 했을 때의 Z 는?
- ㉗ 근사적으로 t 분포에 따른다.
- ㉘ 근사적으로 정규분포에 따른다.

- ㉙ 근사적으로 χ^2 분포에 따른다.
- ㉚ 근사적으로 F 분포에 따른다.

해설

- ㉗ R. A. Fisher에 의하면

$$Z = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+r}{1-r} \right) \quad [= \tanh^{-1}(r)]$$

로 정의되는 Z 값은 근사적으로 정규분포에 따르고 기대치 $E(Z)$ 와 분산 $V(Z)$ 는

$$E(Z) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\rho}{1-\rho} \right) + \frac{\rho}{2(n-1)} \approx \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\rho}{1-\rho} \right),$$

$$V(Z) = \frac{1}{n-3}$$

임이 알려져 있다.

이 변환을 r 의 Z 로의 Z 변환이라고 부른다.

- 07** x 와 y 간의 상관관계 여부에 관한 t 검정을 하고자 한다. 표본의 크기(n)가 150이고 상관계수(r)가 0.61이었다면 검정통계량(t_0)의 값은 얼마인가?

- ㉗ 9.365 ㉘ 9.428
- ㉙ 10.365 ㉚ 11.428

해설

$$\textcircled{7} \quad t_0 = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{0.61\sqrt{150-2}}{\sqrt{1-0.61^2}} = 9.3652$$

- 08** 상관분석에 있어서 결정계수와 상관계수에 관한 설명으로 옳은 것은?

- ㉗ 결정계수의 범위는 -1부터 +1사이의 값으로 나타난다.
- ㉘ 상관계수는 회귀식의 기여율로 해석되어진다.
- ㉙ 일반적으로 조건이 같을 경우 상관계수는 회귀계수보다 작은 값을 갖는다.
- ㉚ 수치변환을 하여도 결정계수의 값은 항상 같다.

해설

- ㉗ $-1 \leq r$

- ㉔ 결정계수 $R^2 (= r^2)$ 는 회귀식의 기여율로 해석되어 진다.
- ㉕ 상관계수 r 과 회귀계수 b 는 별개이다.
- ㉖ 수치변환을 하여도 상관계수의 값은 수치변환전의 값과 동일하다.

09 두 변수 x, y 에서 x 는 독립변수, y 는 그에 대응하는 종속변수이고 대응을 이루고 있는 시료가 n 개일 때, 이들 사이의 상관관계를 분석하는 수식으로 가장 부적합한 것은?

㉔ $r = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sqrt{V(x)V(y)}}$

㉕ $r = \frac{S_{(xy)}}{\sqrt{(n-1)^2 V(x)V(y)}}$

㉖ $r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}}$

㉗ $r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{V(x)V(y)}}$

해설

- ㉔ 두 확률변수 X, Y 간의 상관계수의 표시는 $\text{Corr}(X, Y)$ 또는 간단히 ρ 로 나타내며, 다음 식으로 정의된다.

$$\rho = \frac{E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]}{\sqrt{E(X - \mu_x)^2} \cdot \sqrt{E(Y - \mu_y)^2}}$$

$$= \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

여기서, $\sigma_x^2 = E(X - \mu_x)^2$, $\sigma_y^2 = E(Y - \mu_y)^2$

$$\sigma_{xy} = E(X - \mu_x)(Y - \mu_y)$$

상기 ρ 의 식에서 X, Y 가 서로 독립이면 공분산 $\text{Cov}(X, Y) = 0$ 이므로 $\rho = 0$ 이 된다.

㉕ $r = \frac{S_{(xy)}}{\sqrt{S_{(xx)}S_{(yy)}}}$

$$= \frac{S_{(xy)}}{\sqrt{V(x) \cdot (n-1) \times V(y) \cdot (n-1)}}$$

$$= \frac{S_{(xy)}}{\sqrt{(n-1)^2 V(x)V(y)}}$$

㉖ $r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}}$

$$= \frac{S_{(xy)}}{\sqrt{S_{(xx)}S_{(yy)}}}$$

10 상관관계가 유의하다고 하는 것은 모 상관 관계가 어떻게 되는 것을 의미하는가?

- ㉔ 크다는 것을 뜻한다.
- ㉕ 0이라고 인정할 수 없다는 것을 뜻한다.
- ㉖ 작다는 것을 뜻한다.
- ㉗ 1에 가깝다는 것을 뜻한다.

해설

상관 유무에 관한 검정에서

$$H_0 : \rho = 0, H_1 : \rho \neq 0 \text{ 이므로 귀무가설 } H_0$$

을 유의수준 α %로 기각할 때에는 $\rho \neq 0$ 이며, 이는 모상관계수 ρ 가 0이라고 할 수 없다는 뜻이다.

11 반응온도(x)와 수율(y)의 대응관계 데이터 20개를 추출하고 시료상관계수를 구하였더니 $r = 0.555$ 였다. $\rho = 0$ (ρ 는 모상관계수)의 가설검정을 유의수준 1%로 하면 그 결과는?

(단, $r_{0.995}(19) = 0.549$, $r_{0.995}(18) = 0.561$)

- ㉔ 상관관계가 있다고 할 수 없다.
- ㉕ 상관관계가 있다고 할 수 있다.
- ㉖ 재검정을 요한다.
- ㉗ 대립가설 $\rho \neq \rho_0$ 를 채택한다.

해설

모상관계수($\rho = 0$)에 대한 r 분포를 이용한

가설검정

① 가설 설정 :

$H_0: \rho=0, H_1: \rho \neq 0$ (양쪽검정)

② 유의수준 : $\alpha=0.01$

③ 검정통계량의 값(r_0) 계산 :

$$r_0 = \frac{S_{(xy)}}{\sqrt{S_{(xx)}S_{(yy)}}} = r = 0.555$$

④ 기각역 설정 :

$$|r_0| > r_{1-\alpha/2}(n-2) = r_{0.995}(18) = 0.561 \text{ 이면}$$

H_0 기각

⑤ 판정 : $|r_0| = 0.555 < r_{0.995}(18) = 0.561$ 이므로

유의수준 1%로 H_0 를 기각할 수 없다.

즉, 상관관계가 없다고 판정한다.

12 두 집단으로부터 추출된 n 쌍의 자료를 이용하여 두 집단 간의 모상관계수가 0인지($H_0: \rho=0$)를 검정하고자 할 때 사용되는 검정통계량의 자유도는?

- ㉠ $n-1$ ㉡ $n-2$
 ㉢ $2n-1$ ㉣ $2n-2$

해설

상관계수의 검정 방법 ($\rho=0$ 일 때)

적용		t 표	r 표
가 설	H_0	$\rho = 0$	$\rho = 0$
	H_1	$\rho \neq 0$	$\rho \neq 0$
검정 통계량		$t_0 = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$	$r_0 = \frac{S_{(xy)}}{\sqrt{S_{(xx)}S_{(yy)}}}$
기각역		$ t_0 > t_{1-\alpha/2}(n-2)$	$ r_0 > r_{1-\alpha/2}(n-2)$

4.3 회귀분석

◆ 회귀분석의 개념 ◆

01 2변수 x, y 가 있는데, x 는 독립변수, y 는 그에 대한 종속변수라고 할 때, 이들 사이의 관계를 분석하기에 가장 적당한 것은?

- ㉠ 교호관계분석, 상관분석
 ㉡ 상관분석, 교락관계분석
 ㉢ 회귀분석, 교락관계분석
 ㉣ 상관분석, 회귀분석

해설

상관분석, 회귀분석의 차이점으로서, 상관분석은 2개의 특성 x 와 y 가 어느 것이나 랜덤하게 변하는 확률변수이어야 한다는 것을 전제로 하는 분석이고, 회귀분석은 x 가 확정수, y 가 랜덤하게 변하는 확률변수일 경우 적용하는 분석이다. 그러나 2변수간의 관계를 분석하는 공통점이 있다.

◆ 직선회귀 (단회귀) ◆

02 어떤 상관표로부터 계산한 결과가 $\bar{x}=4.855, \bar{y}=63.55, S_{xx}=92.9095, S_{yy}=651.695$ 이었을 때, x 를 독립변수로 하는 회귀직선식은?

- ㉠ $y = 25.48 + 0.143x$
 ㉡ $y = 29.50 + 0.143x$
 ㉢ $y = 25.48 + 7.014x$
 ㉣ $y = 29.50 + 7.014x$

해설

회귀직선식 $y - \bar{y} = b(x - \bar{x})$ 의 관계식에 의

$$\text{거, 회귀계수 } b = \frac{S_{(xy)}}{S_{(xx)}} = \frac{651.695}{92.9095} = 7.014$$

$$\text{이므로 } y - 63.55 = 7.014(x - 4.855)$$

$$\rightarrow \therefore y = 7.014x + 29.50$$

03 독립변수를 x , 종속변수를 y 라 할 때 $X = (x-10) \times 10, Y = (y-50) \times 10$ 으로 수치 변환하여 회귀계수 β_1 을 구했더니 2.5이었다. x 에 대한 y 의 회귀직선의 기울기를 구하면?

- ㉠ 0.025 ㉡ 0.25 ㉢ 2.5 ㉣ 25

해설

☞ x 에 대한 y 의 회귀직선식을 $y = \beta_0 + \beta_1 x$ 라 할 때 회귀계수 $\beta_1 = 2.5$ 이라면, 수치변환하여 β_1 을 구하였다 하더라도 회귀직선의 기울기는 회귀계수 $\beta_1 = 2.5$ 로서 동일하다.

04 어떤 제품의 두 특성치 x, y 간의 관계가 $r=0.664$ 이었다. 요즘 원료변화로 시료 250개에 대하여 상관계수를 측정한 결과 다음과 같을 때 x 에 대한 y 의 회귀식은?

$$\bar{x} = 1.505, \bar{y} = 2.303,$$

$$r = \frac{\sqrt{S_{xy}^2}}{\sqrt{S_{xx} \cdot S_{yy}}} = \frac{\sqrt{(1.043)^2}}{\sqrt{1.500 \times 1.325}} = 0.740$$

㉠ $y = 0.787x - 0.307$

㉡ $y = 0.787x + 1.257$

㉢ $y = 0.695x - 0.307$

㉣ $y = 0.695x + 1.257$

해설

㉣ 회귀직선식은 $y - \bar{y} = b(x - \bar{x})$ 의 관계식으

$$\text{로부터 회귀계수 } b = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{1.043}{1.500} = 0.695$$

이므로,

$$y - 2.303 = 0.695(x - 1.05)$$

$$\rightarrow \text{이를 정리하면 } y = 0.695x + 1.257$$

05 M 화학공정에서 촉진제 양(x)에 따라 생성되는 반응량(y)이 어떻게 변화하는가를 조사하였더니 다음의 결과를 얻었다. 촉진제 5g을 투입했을 때 반응량을 추정하면 어느 정도인가?

x	1	2	3	4
y	3	5	6	6

㉠ 6.5 ㉡ 7.0 ㉢ 7.5 ㉣ 8.0

해설

$$\text{☞ } x \text{에 대한 } y \text{의 회귀식 } y - \bar{y} = b(x - \bar{x})$$

$$\rightarrow y - 5 = 1(x - 2.5) \rightarrow \therefore y = x + 2.5$$

여기서,

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{10}{4} = 2.5, \bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{20}{4} = 5$$

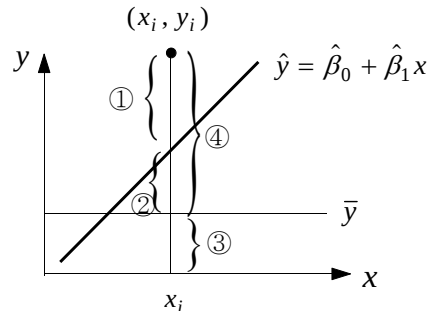
$$\text{회귀계수 } b = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\text{단, } S_{xx} = \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n} = 30 - 25 = 5,$$

$$S_{xy} = \sum xy - \frac{(\sum x)(\sum y)}{n} = 55 - 50 = 5$$

◆ 단순회귀분석 ◆

06 그림에서 회귀관계로 설명이 되지 않는 편차를 나타내는 부분은?



㉠ ① ㉡ ② ㉢ ③ ㉣ ④

해설

$$\text{☞ 편차 } \hat{e}_i = y_i - \bar{y} = (y_i - \hat{y}) + (\hat{y} - \bar{y})$$

$$\text{④} \quad \text{①} \quad \text{②}$$

여기서 ④는 총편차, ①은 회귀관계로 설명이 안 되는 편차, ②는 회귀관계로 설명되는 편차이다.

07 12개 표본으로부터 두 변수 x, y 에 대해 데이터를 구했더니, $S_{xx} = 10, S_{yy} = 26, S_{xy} = 16$ 이었다. 이때 회귀계수(β_1)의 95% 신뢰구간을 바르게 추정한 것은?

(단, $t_{0.975}(10) = 2.228$, $t_{0.975}(11) = 2.201$ 이다.)

- ㉠ 1.6 ± 0.139 ㉡ 1.6 ± 0.141
 ㉢ 2.6 ± 0.139 ㉣ 2.6 ± 0.141

해설

- ㉠ 회귀직선 $y = \beta_0 + \beta_1 x$ 에서 모회귀계수 β_1 의 추정식

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_1 &= b \pm t_{1-\alpha/2}(n-2) \sqrt{\frac{V_E}{S_{(xx)}}} \\ &= 1.6 \pm t_{0.975}(10) \sqrt{\frac{0.04}{10}} \\ &= 1.6 \pm 2.228 \times 0.063 = 1.6 \pm 0.141\end{aligned}$$

여기서,

$$\text{회귀계수 } b = \frac{S_{(xy)}}{S_{(xx)}} = \frac{16}{10} = 1.6,$$

$$V_E = \frac{S_E}{n-2} = \frac{S_{(yy)} - S_R}{n-2} = \frac{26 - 25.6}{12-2} = 0.04$$

$$\text{단, } S_R = \frac{[S_{(xy)}]^2}{S_{(xx)}} = b^2 S_{(xx)} = 16^2 \times 10 = 256$$

- 08** x 에 대한 y 의 회귀관계를 검정하려고 $n=7$ 회($r=1$)의 x 에 대한 y 의 값을 측정하고 다음의 값을 구하였다. “회귀에 의한 변동”의 값은?

$$S_{xx}=151.4, S_{yy}=40.1, S_{xy}=76.3$$

- ㉠ 0.498 ㉡ 1.65
 ㉢ 10.25 ㉣ 38.45

해설

- 단순회귀분석에서 회귀에 의한 변동(회귀

$$\text{변동) } S_R = \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}} = \frac{76.3^2}{151.4} = 38.45$$

- 09** x 에 대한 y 의 회귀관계를 검정하려고 $n=7$ 회($r=1$)의 x 에 대한 y 의 값을 측정하고, 다음의 값을 구하였다. “회귀로부터의 변동”의 값은?

$$S_{xy}=75.4, S_{xx}=151.4, S_{yy}=39.4$$

- ㉠ 1.85 ㉡ 38.90
 ㉢ 39.14 ㉣ 1.70

해설

- 단순회귀분석에서 회귀로부터의 변동(잔차 변동) $S_E = S_{yy} - S_R = 39.4 - 37.55 = 1.85$

$$\text{여기서, 회귀변동 } S_R = \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}} = \frac{75.4^2}{151.4} = 37.55$$



- 제1장 신뢰성의 개념
- 제2장 고장률과 고장확률밀도함수
- 제3장 보전성과 가동성
- 제4장 신뢰성 시험과 추정
- 제5장 신뢰성 샘플링검사
- 제6장 시스템의 신뢰도
- 제7장 신뢰성 설계 및 관리
- 제8장 고장해석기법 FMEA·FTA

행운은 100% 노력한 뒤에
남는 것이다!
- 랭스턴 콜만 -

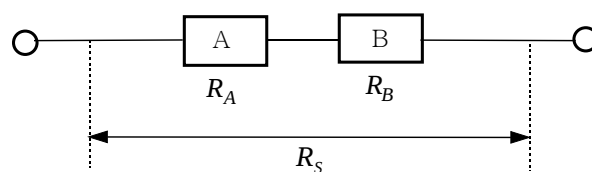
제6장 시스템의 신뢰도

1. 시스템 신뢰도의 개요

- * 일반적으로 소자(素子)나 부품이 결합되어 조립품(보조기계)가 되고, 보조기계가 결합되어 컴포넌트(단위설비)가 된다. 그리고 컴포넌트들이 모여 서브시스템(단위공정)이 되며, 이들 서브시스템이 모여 시스템(공정)이 되는 것이다.
- * 신뢰성은 개개의 소자나 부품에 대해서도 중요하나 이들이 결합된 조립품이나 컴포넌트, 나아가 서브시스템, 시스템의 신뢰성은 더욱 중요하다.
그러므로 소자나 부품의 신뢰성이 이들의 조합으로 구성된 상위 레벨인 시스템의 신뢰성에 어떠한 관계를 가지는가를 알아 둘 필요가 있다.
- * 시스템을 구성하고 있는 여러 개의 소자나 부품의 결합방법은 크게 직렬결합모델과 병렬결합모델로 나누어지나 특수한 결합모델도 있다.

2. 직렬결합모델의 신뢰도

- * 조립품이나 컴포넌트, 시스템 등을 구성하고 있는 여러 개의 소자나 부품 중 어느 하나라도 고장이 나게 되면 시스템 전체가 기능을 상실하게 되도록 소자나 부품이 결합된 것을 직렬결합모델이라고 한다.
- * [그림 6.1]과 같이 A, B 2개의 부품이 직렬결합모델로 되어 있으면 이 기기가 제대로 기능을 발휘하기 위해서는 A와 B 2개의 부품이 모두 정상작동하여야 한다.



[그림 6.1] 직렬결합모델

- * 직렬결합모델의 전체 시스템이 작동하는 전체 신뢰도 R_S 는 다음과 같다.

$$R_S = P_r(A \text{ AND } B) = P_r(A \cap B)$$

- * 만일 A, B가 서로 독립사상이면

$$R_S = P_r(A) \cdot P_r(B) = R_A \cdot R_B \quad (6.1)$$

여기서, $P_r(A)$ 는 부품 A의 신뢰도 R_A , $P_r(B)$ 는 부품 B의 신뢰도 R_B 를 의미한다.

일반적으로 n 개 부품이 직렬결합시의 시스템의 신뢰도 R_S 는 다음 식과 같이 된다.

$$R_S = R_1 \cdot R_2 \cdots R_n = \prod_{i=1}^n R_i = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)t} \quad (6.2)$$

* 그리고 각 부품의 고장밀도함수가 지수분포에 따르는 경우

$$R_S = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)t} = e^{-\lambda_S t}$$

의 관계에서 전체의 고장률 λ_S 는 다음의 식으로 구해진다.

$$\lambda_S = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \quad (6.3)$$

* 한편 시스템의 신뢰성을 구할 때 중요한 것은 t 시간 후의 잔존확률인 신뢰성 $R(t)$ 로서, 다음의 근사식에 의해 $R(t)$ 의 값을 구하면 편리하다.

$$R(t) = e^{-\lambda t} = e^{-\frac{t}{MTBF}} \doteq 1 - \frac{t}{MTBF} \quad (6.4)$$

여기서, t = 사용시간, $\lambda = 1/MTBF$

* 또한 고장률 λ_i 인 부품이 여러 개 직렬연결된 시스템의 $MTBF$ 는 다음과 같이 구한다.

$$MTBF_S = \frac{1}{\lambda_S} \quad (6.5)$$

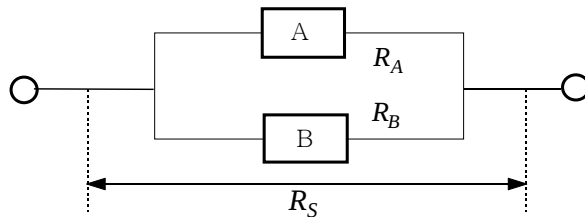
$$\text{여기서, } \lambda_S = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$

3. 병렬결합모델의 신뢰도

* [그림 6.2]는 부품을 여분으로 한 개 더 부가시켜서 부품 2개 중 어느 한 개만 작동하면 전체가 기능을 발휘할 수 있도록 결합한 것이다.

* 이와 같은 설계를 병렬설계라 하며, 용장(冗長)설계, redundancy설계, 여유설계 등으로도 불린다.

병렬설계를 하면 전체의 신뢰도를 크게 증대시킬 수 있다.



[그림 6.2] 병렬결합모델

* 병렬결합모델의 전체 시스템이 작동하는 전체 신뢰도 R_S 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} R_S &= P_r(A \text{ OR } B) = P_r(A \cup B) \\ &= P_r(A) + P_r(B) - P_r(A) \cdot P_r(B) \\ &= R_A + R_B - R_A \cdot R_B \end{aligned} \quad (6.6)$$

* 또한 $R(t) + F(t) = 1$ 의 관계에서 다음 식으로 될 수 있다.

$$\begin{aligned} R_S &= (1 - F_A) + (1 - F_B) - (1 - F_A)(1 - F_B) \\ &= 1 - F_A F_B = 1 - (1 - R_A)(1 - R_B) \end{aligned} \quad (6.7)$$

* 일반적으로 n 개의 부품이 병렬결합시 시스템 전체의 신뢰도 R_S 는 다음과 같다.

$$R_S = 1 - \prod_{i=1}^n F_i = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i) \quad (6.8)$$

* 병렬결합모델의 시스템 $MTBF$ 는 식 (6.6)에서

$$R(t) = e^{-\lambda t}, R_1(t) = e^{-\lambda_1 t}, R_2(t) = e^{-\lambda_2 t}$$

의 지수분포를 따를 때, 이것으로 대치하고 양변을 적분하여 $MTBF$ 를 구한다.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} R(t) dt &= \int_0^{\infty} R_1(t) dt + \int_0^{\infty} R_2(t) dt - \int_0^{\infty} R_1(t) R_2(t) dt \\ \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda_1 t} dt + \int_0^{\infty} e^{-\lambda_2 t} dt - \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} dt \\ \frac{1}{\lambda} &= \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \end{aligned}$$

* 이에 의거 병렬결합시스템의 $MTBF_S$ 는 다음과 같이 구한다.

$$MTBF_S = \frac{1}{\lambda_S} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad (6.9)$$

* 상기 식에서 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ 라면 $MTBF_S$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$MTBF_S = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\lambda_0} \quad (6.10)$$

* 일반적으로 $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda_0$ 인 n 개 구성부품의 병렬결합시스템의 $MTBF_S$ 는 다음 식으로 구해진다.

$$MTBF_S = \frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{2\lambda_0} + \dots + \frac{1}{n\lambda_0} \quad (6.11)$$

* 또는 평균수명 $\theta_0 = 1/\lambda_0$ 이라면 시스템의 $MTBF_S$ 는 다음과 같다.

$$MTBF_S = \sum_{i=1}^n \frac{\theta_0}{i} \quad (6.12)$$

* 그리고 시스템의 고장률 λ_S 는 다음 식으로 구해진다.

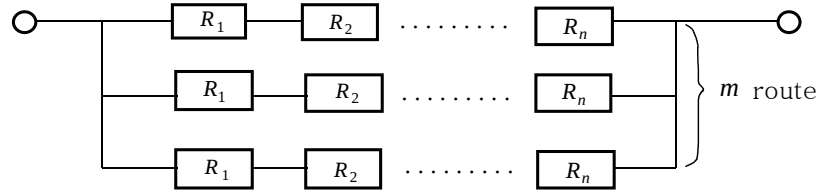
$$\lambda_S = \frac{1}{MTBF_S} = \frac{1}{\frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{2\lambda_0} + \dots + \frac{1}{n\lambda_0}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{\theta_0}{i}} \quad (6.13)$$

여기서, $\theta_0 = 1/\lambda_0$ 인 경우이다.

4. 특수결합모델의 시스템 신뢰도

4.1 m route 시스템 신뢰도

* 병렬결합모델의 특수한 경우로서 m route 시스템 신뢰도는 다음 그림과 같은 구조로 된다.



[그림 6.3] m route의 서브시스템 결합

* 직렬인 경우의 서브시스템으로서 신뢰성은 다음과 같다.

$$R_{SS} = R_1 \cdot R_2 \cdots R_n = \prod_{i=1}^n R_i \quad (6.14)$$

* 병렬인 경우의 m route에서의 신뢰성은 다음과 같다.

$$R_S = 1 - (1 - R_{SS})^m = 1 - (1 - \prod_{i=1}^n R_i)^m \quad (6.15)$$

여기서, $R_1 = R_2 = \cdots = R_n = R$ 일 경우에는 다음 식으로 된다.

$$R_S = 1 - (1 - R^n)^m \quad (6.16)$$

4.2 n 중 k (k out of n) 시스템 신뢰도

* n 개 중 k 개만 작동하면($1 \leq k \leq n$) 시스템이 작동하는 경우 각 구성품의 신뢰도를 R 이라 하면 시스템의 신뢰도 R_S 는 다음과 같다.

$$R_S = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} R^i (1-R)^{n-i} \quad (6.17)$$

* 만일 $R(t) = e^{-\lambda t} = e^{-t/\theta}$ 의 지수분포에 따른다면 시스템의 $MTBF_S$ 는 다음과 같이 된다.

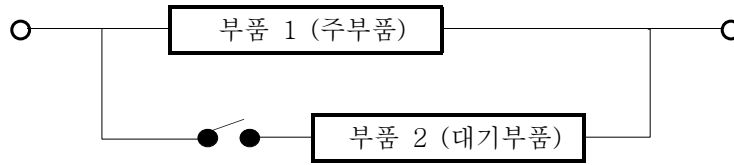
$$MTBF_S (= \theta_S) = \sum_{i=k}^n \frac{\theta_0}{i} = MTBF_0 \left(\frac{1}{k} + \cdots + \frac{1}{n} \right) \quad (6.18)$$

4.3 대기결합모델의 시스템 신뢰도

4.3.1 대기결합모델의 의미

* 여분의 부품이 처음부터 병렬로 연결되어 있지 않고 처음에는 주부품이 그의 기능을 수행하다가 이것이 고장나면 여분의 부품인 대기부품이 그의 기능을 이어받아 계속 수행하도록 결합되어 있는 것을 말한다.

* 그리고 대기결합구조로 시스템을 구성하면 신뢰도가 증가하게 되는 성질을 대기리던던시(stand-by redundancy)라고 한다.



[그림 6.4] 대기결합구조

4.3.2 대기결합모델의 시스템 신뢰도

- ① 주부품인 부품 1의 신뢰도 R_1 과 대기부품인 부품 2의 신뢰도 R_2 가 각각 평균고장률이 λ_1 과 λ_2 인 지수분포에 따르고, 이 시스템의 임무기간(mission time)이 T 라 할 때

$$R_S = e^{-\lambda_1 T} + \int_0^T \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} \cdot e^{-\lambda_2 (T-t)} dt = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} [\lambda_1 e^{-\lambda_2 T} - \lambda_2 e^{-\lambda_1 T}] \quad (6.19)$$

- ② $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ 인 경우에는 주부품 한 개일 경우보다 $MTBF_S$ 는 2배, 신뢰도 R_S 는 $(1 + \lambda T)$ 배만큼 증가한다. 즉,

$$\textcircled{㉗} R_S = e^{-\lambda T} + \int_0^T \lambda e^{-\lambda t} \cdot e^{-\lambda (T-t)} dt = e^{-\lambda T} (1 + \lambda T) \quad (6.20)$$

$$\textcircled{㉘} \text{ 전환스위치 신뢰도 } R_{SW} \text{를 고려할 경우 } R_S = e^{-\lambda T} (1 + R_{SW} \cdot \lambda T) \quad (6.21)$$

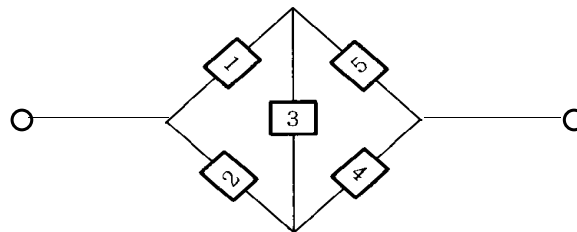
$$\textcircled{㉙} MTBF_S = \int_0^T e^{-\lambda t} (1 + \lambda t) dt = \frac{2}{\lambda} \quad (6.22)$$

- ③ 일반적으로 $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda$ 인 n 개의 부품이 대기결합구조로 구성된 경우

$$R_S = e^{-\lambda t} \left[1 + \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2!} + \dots + \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \right] \quad (6.23)$$

$$MTBF_S = \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} + \dots \right)_{n\text{개}} = \frac{n}{\lambda} \quad (6.24)$$

4.4 브리지구조의 시스템 신뢰도



[그림 6.5] 브리지 구조

(1) 브리지구조(bridge structure)시스템의 신뢰도

$$\begin{aligned}
 R_S = & R_1 R_5 + R_1 R_3 R_4 + R_2 R_3 R_5 + R_2 R_4 \\
 & - R_1 R_3 R_4 R_5 - R_1 R_2 R_3 R_5 - R_1 R_2 R_4 R_5 - R_1 R_2 R_3 R_4 - R_2 R_3 R_4 R_5 \\
 & + 2 R_1 R_2 R_3 R_4 R_5
 \end{aligned} \quad (6.25)$$

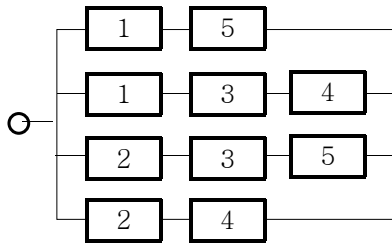
만일 $R_i = R = 0.9$ 이라면 $R_S = 2R^2 + 2R^3 - 5R^4 + 2R^5 = 0.9875$

위의 식과 같이 계산식에 의거한 정확한 계산방법은 각 path와 cut이 동일 부품을 포함하고 있기 때문에 매우 복잡하다.

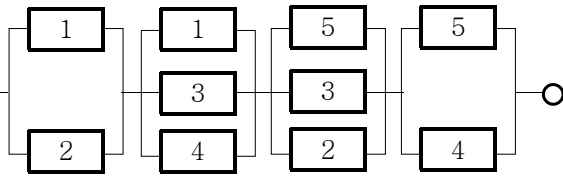
(2) 간이 추정식

$$R_C \leq R_S \leq R_P \quad (6.26)$$

- ① R_P 는 모든 path(그 부품들이 작동하면 전체가 작동하는 부품의 집합)를 병렬로 결합한 시스템의 신뢰도. (그림 6.6 참조)
- ② R_C 는 모든 cut(그 부품들이 고장나면 전체가 고장나는 부품의 집합)을 직렬로 결합한 시스템의 신뢰도. (그림 6.7 참조)



[그림 6.6] 모든 path의 병렬결합



[그림 6.7] 모든 cut의 직렬결합

* 만약 $R_i = R = 0.9$ 이라면

$$R_P = 1 - (1 - R^2)^2 (1 - R^3)^2 = 0.9973, \quad R_C = [1 - (1 - R)^2]^2 \cdot [1 - (1 - R)^3]^2 = 0.9781$$

이므로, 정확한 계산법에 따른 $R_S = 0.9875$ 는 R_C 와 R_P 사이에 있음을 확인할 수 있다.

4.5 교차결합구조의 시스템 신뢰도

- ① 사상공간법(event space method) : 시스템의 유닛들에 대해 모든 가능한 경우(작동, 고장)들을 나열하여 신뢰도를 구하는 방법
- ② 경로추적법 : 시스템이 작동하는 모든 경로를 찾아서 그 합집합의 확률로써 신뢰도를 구하는 방법
- ③ 분해법 : 먼저 한 유닛을 선정하고 그 유닛 부품의 작동, 고장에 따른 조건부 확률을 통해 시스템의 신뢰도를 계산하는 방법.
- ④ 최소절단(cut)집합 : 시스템이 고장나게 되는 최소한의 유닛들의 고장집합
- ⑤ 최소경로(path)집합 : 시스템이 작동되도록 하는 최소크기의 작동유닛의 집합

5. 품질경영기사 필기 [출제예상 엄선문제]

5.1 직렬결합모델 신뢰도

01) 시스템의 신뢰도를 구하는 데 있어서 다음 중 틀린 것은?

- ㉠ 모든 부품이 직렬 연결된 것으로 보고 신뢰도를 구하면 실제 시스템 신뢰도의 하한이 된다.
- ㉡ 모든 부품이 병렬 연결된 것으로 보고 신뢰도를 구하면 실제 시스템 신뢰도의 상한이 된다.
- ㉢ 모든 시스템은 직렬 또는 병렬 연결로 표현이 가능하다.
- ㉣ 시스템 신뢰도는 직렬 또는 병렬로 표현되지 않는 경우도 구할 수 있다.

해설

㉣ 모든 시스템을 직렬 또는 병렬 연결만으로 표현하기에는 부족하다. 이런 이유로 대기모델, n 중 k 시스템, 브리지구조 시스템, 교차 결합구조 등이 있다.

02) n 개의 구성요소 수명이 모두 같은 직렬모형시스템의 고장률은 각 부품(구성요소)의 고장률에 비해서 얼마나 증가하는가?

- ㉠ n 배 증가 ㉡ $\frac{1}{n}$ 로 증가
- ㉢ $2n$ 배 증가 ㉣ n 승 증가

해설

㉡ 직렬결합모델의 전체 시스템이 작동하는 전체 신뢰도 $R_S = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)t} = e^{-\lambda_S t}$ 의 관례로부터 전체의 고장률 λ_S 는 다음의

$$\lambda_S = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \text{ 식으로 구해진다.}$$

03) 직렬구조의 정의로 가장 올바른 것은?

- ㉠ 모든 부품이 하나라도 고장나면 시스템이 고장나는 경우를 말한다.

㉡ 어느 부품이 하나라도 고장나면 시스템이 고장나는 경우를 말한다.

㉢ 어느 부품이 고장나면 대기 중인 다른 부품으로 교체되는 경우를 말한다.

㉣ 부품들 중 특정개수 이상이 작동하면 시스템이 작동하는 경우를 말한다.

해설

㉡ 조립품이나 컴포넌트·시스템 등을 구성하고 있는 여러 개의 소자나 부품 중 어느 하나라도 고장이 나게 되면 시스템 전체가 기능을 상실하게 되도록 소자나 부품이 결합된 것을 직렬결합모델이라고 한다.

A, B 2개의 부품이 직렬결합모델로 되어 있으면 이 기기가 제대로 기능을 발휘하기 위해서는 A 와 B 2개의 부품이 모두 정상작동하여야 한다.

04) 고장률이 각각 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 인 부품 3개가 직렬로 연결되어 있을 때 시스템의 고장률은?

- ㉠ $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ ㉡ $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$
- ㉢ $1 - (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)$
- ㉣ $1 - (-\lambda_1)(1 - \lambda_2)(1 - \lambda_3)$

해설

직렬결합모델에서 $\lambda_S = \sum_{i=1}^n \lambda_i$

05) n 개의 부품으로 이루어지는 직렬시스템에서 각 부품의 고장률이 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 일 때 각 부품의 중요도를 구하는 식으로 옳은 것은?

- ㉠ $W_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$ ㉡ $W_i = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i}{\lambda_i}$
- ㉢ $W_i = \frac{1/\lambda_i}{\sum_{i=1}^n 1/\lambda_i}$ ㉣ $W_i = \frac{\sum_{i=1}^n 1/\lambda_i}{1/\lambda_i}$

해설

☞ n 개의 부품으로 결합된 직렬결합된 시스템의 고장률은 $\lambda_s = \sum \lambda_i$ 이다.

06) 부품 5개로 이루어진 시스템이 직렬로 연결되어 있을 때 이 시스템의 **MTBF** 는 얼마인가? (단, 각 부품의 고장률은 0.02, 0.01, 0.02, 0.01, 0.01이다.)

- ㉠ 15시간 ㉡ 7.3시간
㉢ 14.3시간 ㉣ 11.6시간

해설

☞ n 개 부품으로 결합된 직렬결합 시스템에서

$$\lambda_s = \sum \lambda_i = 0.07 / \text{시간이므로}$$

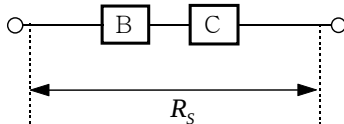
$$MTBF_s = \frac{1}{\lambda_s} = 14.29 \text{ 시간}$$

07) 시스템의 신뢰도나 시스템을 구성하는 구성품 간의 기능적 관련을 나타내는 것은?

- ㉠ 신뢰도배분 ㉡ FTA
㉢ 신뢰성블록도 ㉣ FMEA

해설

☞ 신뢰성블록도의 한 사례로서 직렬계 신뢰성 블록도인 경우 그림과 같은 형태를 취한다.



08) $\lambda_1=0.001$, $\lambda_2=0.001$ 인 두 부품으로 구성된 직렬시스템에 있어서 $t=100$ 에서의 시스템의 신뢰도 R , 고장률 λ , **MTTF** 를 구하면? (단, 고장은 지수분포를 따름)

- ㉠ $R=0.8187$, $\lambda=0.002$, $MTTF=500$
㉡ $R=0.8187$, $\lambda=0.001$, $MTTF=1,000$
㉢ $R=0.9048$, $\lambda=0.002$, $MTTF=500$
㉣ $R=0.9048$, $\lambda=0.00001$, $MTTF=1,000$

해설

☞ 고장이 지수분포를 따를 때

$$\lambda_s = \sum \lambda_i = 0.002,$$

$$R_s(t) = e^{-\lambda_s \cdot t} = e^{-0.002 \times 100} = 0.8187,$$

$$MTTF = \frac{1}{\lambda_s} = \frac{1}{0.002} = 500$$

09) 1,000시간당 평균고장률이 각각 2.8, 3.6, 10.2, 3.4인 부품 4개를 직렬결합으로 설계한다면 이 기기의 평균수명은 몇 시간인가? (단, 각 부품의 고장밀도함수는 지수분포를 따른다.)

- ㉠ 50 ㉡ 98 ㉢ 277 ㉣ 357

해설

☞ 각 부품의 고장밀도함수는 지수분포를 따르고, 직렬결합일 때

$$\lambda_s = \sum \lambda_i = 20 / 1,000 \text{시간} = 0.02 / \text{시간이므로}$$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{\lambda_s} = \frac{1}{0.02} = 50 \text{ 시간}$$

10) 타이어의 평균고장률은 0.0001/km이다. 4개의 타이어를 부착한 승용차 타이어의 평균고장률은?

- ㉠ $1.0 \times 10^{-4} / \text{km}$ ㉡ $1.5 \times 10^{-4} / \text{km}$
㉢ $2.5 \times 10^{-4} / \text{km}$ ㉣ $4.0 \times 10^{-4} / \text{km}$

해설

☞ 4개의 타이어는 하나라도 펑크나면 자동차가 운행이 중단되므로 사실상 직렬연결과 같다.

$$\lambda_s = \sum \lambda_i = 4 \times 0.0001 = 4 \times 10^{-4} (/ \text{km})$$

11) 10개의 동일부품으로 구성되는 기기를 1,000시간 사용했을 때 이 기기의 신뢰도를 0.9로 하고 싶다. 10개의 부품 중 어느 하나라도 고장이 나면 이 기기의 기능은 상실된다. 구성부품의 평균고장률은? (단, 각 부품의 고장은 지수분포를 한다.)

- ㉠ $1.0 \times 10^{-4}/h$ ㉡ $1.0 \times 10^{-5}/h$
 ㉢ $1.05 \times 10^{-4}/h$ ㉣ $1.05 \times 10^{-5}/h$

해설

1.8 $R_S(t=1,000) = e^{-\lambda_S t} = e^{-\lambda_S \times 1,000} = 0.9$ 의 식 으
 로부터

$$-\lambda_S \times 1,000 = \ln 0.9$$

$$\rightarrow \lambda_S = \frac{-\ln 0.9}{1,000} = 1.05 \times 10^{-4}/h \text{이고,}$$

어느 하나도 고장나면 안 되는 직렬시스템이

$$\text{므로 } \lambda_S = \sum_{i=1}^n \lambda_i \text{ 에서 } 1.05 \times 10^{-4} = 10\lambda_i$$

$$\therefore \lambda_i = \frac{\lambda_S}{10} = 1.05 \times 10^{-5}/h$$

- 12 어떤 삼륜차의 각각의 타이어가 파열
 될 확률은 0.04이다. 이 삼륜차 타이어 전체
 의 신뢰도는 약 얼마인가?

- ㉠ 0.88 ㉡ 0.93 ㉢ 0.96 ㉣ 0.98

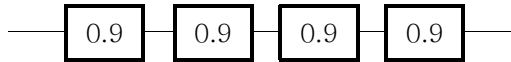
해설

- ㉠ 삼륜차는 어느 타이어가 고장나더라도 운행
 이 중단되는 직렬계로 생각할 수 있으므로,

$$R_S = R_1 \times R_2 \times R_3 = R_i^3 = 0.96^3 = 0.8847$$

- 13 그림과 같은 직렬모형 시스템의 신뢰
 도는 약 얼마인가?

(단, 각 부품의 신뢰도는 0.9)



- ㉠ 0.6561 ㉡ 0.6781
 ㉢ 0.6891 ㉣ 0.6981

해설

$$\text{㉠ } R_S = \prod_{i=1}^4 R_i = R_i^4 = (0.9)^4 = 0.6561$$

- 14 5개의 부품이 직렬로 이루어진 시스템
 의 $MTTF$ 가 10^4 시간 이상이 되려면 각 부
 품의 고장률은 얼마 이하이어야 하는가?

(단, 모든 부품의 고장률은 동일하며, 지수분
 포를 따른다.)

- ㉠ $5 \times 10^4/h$ ㉡ $5 \times 10^{-4}/h$

- ㉢ $\frac{1}{5} \times 10^4/h$ ㉣ $\frac{1}{5} \times 10^{-4}/h$

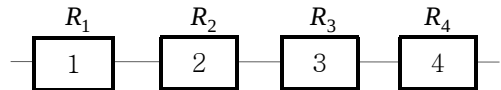
해설

1.8 지수분포를 따르고, 직렬결합일 때

$$MTTF = \frac{1}{\lambda_S} = \frac{1}{\sum \lambda_i} = \frac{1}{5\lambda_0} \geq 10^4 \text{ 시간}$$

$$\rightarrow \lambda_0 \leq \frac{1}{5 \times 10^4} = \frac{1}{5} \times 10^{-4} (/시간)$$

- 15 그림과 같이 4개의 부품이 직렬구조로
 연결되어 있을 경우 시스템의 신뢰도를 바르
 게 표현한 것은? (단, 각 부품의 신뢰도는
 R_1, R_2, R_3, R_4 이다.)



- ㉠ $R_1 R_2 R_3 R_4$
 ㉡ $1 - R_1 R_2 R_3 R_4$
 ㉢ $(1 - R_1)(1 - R_2)(1 - R_3)(1 - R_4)$
 ㉣ $1 - (1 - R_1)(1 - R_2)(1 - R_3)(1 - R_4)$

해설

- ㉠ 직렬결합인 경우에 시스템의 신뢰도는 각 부
 품 신뢰도의 곱으로 되며, 시스템의 신뢰성
 이 감소한다.

- 16 동일한 신뢰도를 가진 부품 10개가
 이 중 하나라도 고장이 나면 전체가 작동되
 지 않도록 결합되어 만들어진 장치가 있다.
 이 장치의 목표신뢰도가 0.9가 되도록 하려
 면 각 부품의 신뢰도는 얼마인가?

- ㉠ 0.99 ㉡ 0.9895
 ㉢ 0.3487 ㉣ 0.2848

해설

1.8 하나라도 고장이 났을 때 전체가 작동되지

않는다면 직렬결합의 경우이므로, 시스템신

뢰도 $R_S = (R_i)^n$ 에서 $0.9 = (R_i)^{10}$

$\therefore$ 부품신뢰도 $R_i = (0.9)^{1/10} = 0.9895$

17 n 개의 부품이 직렬구조로 구성된 시스템이 있다. 각 부품의 수명분포가 지수분포를 따르며, 각 부품 평균고장시간이 $MTTF_0$ 일 때 이 시스템의 평균고장시간은?

- ㉠ $MTTF_0$ ㉡ $\frac{MTTF_0}{2}$
 ㉢ $n \times MTTF_0$ ㉣ $\frac{MTTF_0}{n}$

해설

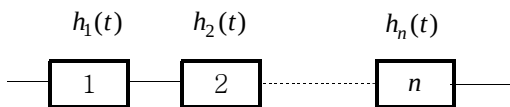
직렬구조모형의 $R_S = R_1 \cdot R_2 \cdots R_n = \prod_{i=1}^n R_i$
 $= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)t} = e^{-\lambda_S t}$ 가 되므로,

$$\lambda_S = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

λ_i 가 λ_0 로서 모두 동일한 경우에는 $\lambda_S = n\lambda_0$ 가 된다.

$$\text{따라서 } MTTF_S = \frac{1}{\lambda_S} = \frac{1}{n\lambda_0} = \frac{MTTF_0}{n}$$

18 고장률함수가 $h(t)$, $i=1, 2, \dots, n$ 인 부품 n 개를 직렬연결하였다. 시스템의 고장률함수로 가장 올바른 것은?



- ㉠ $\sum_{i=1}^n h_i(t)$
 ㉡ 고장분포함수가 지수분포가 아니면 구할 수 없다.
 ㉢ $h_1(t) \cdot h_2(t) \cdots h_n(t)$
 ㉣ $\max[h_i(t)]$

해설

직렬결합일 때 시스템의 고장률함수는

$$\lambda_S(t) = \sum \lambda_i(t) = \sum h_i(t)$$

여기서, $h(t)$ 는 $\lambda(t)$ 와 같은 개념이다.

19 다음 설명 중 틀린 것은?

- ㉠ 부품의 고장률함수가 증가형인 직렬구조에서는 시스템의 고장률함수도 증가형이다.
 ㉡ 부품의 고장률함수가 증가형인 직렬구조에서의 고장률은 부품의 고장률함수가 상수일 때인 경우 보다 높다.
 ㉢ 병렬구조의 신뢰도는 단일부품의 신뢰도 보다 항상 높다.
 ㉣ 직렬구조의 신뢰도는 단일부품의 신뢰도 보다 낮지 않다.

해설

㉣ 직렬구조의 시스템신뢰도 $R_S = \prod_{i=1}^n R_i$ 는 단일부품의 신뢰도 R_i 보다 낮다.

복잡한 시스템의 부품은 직렬결합모델로 볼 수 있기 때문에 $R_S = (R_i)^n$ 이 되어 신뢰도가 저하된다. 그렇기 때문에 신뢰성 증대 설계기술 및 관리기술이 필요하게 된다.

20 타이어의 평균고장률은 0.0001/km이다. 4개의 타이어를 부착한 승용차타이어의 평균고장률은 얼마인가?

- ㉠ $1 \times 10^{-4} / \text{km}$ ㉡ $1.5 \times 10^{-4} / \text{km}$
 ㉢ $2.5 \times 10^{-4} / \text{km}$ ㉣ $4 \times 10^{-4} / \text{km}$

해설

4개의 타이어 중에서 어느 하나라도 펑크가 나면 자동차는 주행불가이므로 4개의 타이어가 직렬결합된 경우라고 볼 수 있다.

$$\lambda_S = \sum \lambda_i = 4 \times \lambda_i = 4 \times 0.0001 = 4.0 \times 10^{-4} / \text{km}$$

21 자동차가 안전하게 고속도로를 주행할 수 있는 조건을 차체 엔진부, 동력전달부, 브레이크부, 운전기사 등의 하위 시스템으로 나눌 때 이것은 어느 모형에 적합한가?

- ㉠ 병렬 모형 ㉡ 직렬 모형
㉢ 브리지 모형 ㉣ 대기 중복

해설

㉡ 하위 시스템 중 어느 하나라도 문제가 있으면 자동차가 안전하게 주행할 수 없으므로, 직렬모형이라 할 수 있다.

22 직렬시스템의 신뢰도에 대한 설명으로 가장 거리가 먼 것은?

- ㉠ 시스템신뢰도는 구성컴포넌트 신뢰도의 곱으로 표현된다.
㉡ 시스템신뢰도는 구성컴포넌트의 신뢰도보다 클 수 없다.
㉢ 최소절단집합(MCS)의 개수는 구성컴포넌트의 개수보다 작다.
㉣ 최소경로집합(MPS)의 개수는 항상 한 개다.

해설

- ㉣ 최소절단집합의 개수는 구성컴포넌트의 개수와 같다.
- ① 절단집합(cut set) : FTA에서 정상사상의 고장을 야기시키는 기본사건들의 집합
 - ② 최소절단집합(minimal cut set) : 어느 기본사건을 제외시키면 나머지 사건들이 더 이상 절단집합이 안 됨.
 - ③ 경로집합(path set) : 절단집합이 아닌 집합(dual set). 이 집합 중 어느 하나라도 성립되면 정상사상의 고장이 발생하지 않음.
 - ④ 최소경로집합(minimal path set) : 만일 경로집합에서 어느 사건이라도 제거될 경우 나머지 사건들이 더 이상 경로집합이 아님.

23 다음 설명 중 틀린 것은?

- ㉠ 부품의 고장률함수가 증가형인 직렬구조에서는 시스템의 고장률함수도 증가형이다.
㉡ 병렬구조의 신뢰도는 항상 단일부품의 신뢰도보다 항상 높다.

㉠ 직렬구조의 신뢰도는 단일부품의 신뢰도보다 낮지 않다.

㉡ 대기형(stand-by)구조는 단일부품의 신뢰도보다 항상 높다(단, 전환스위치의 신뢰도는 문제가 안 됨).

해설

㉣ 직렬구조의 시스템 신뢰도는 $R_S = \prod_{i=1}^n R_i$ 이

므로 시스템의 R_S 는 단일부품 신뢰도 R_i 보다 클 수는 없다.

24 두 개의 부품이 직렬로 이루어진 시스템을 고려하자. 두 부품 모두 고장률이 시간당 2×10^{-4} 이라고 할 때 시스템이 100시간 이상 작동할 확률은 얼마인가?

- ㉠ $e^{-2 \times 10^{-2}}$ ㉡ $e^{-4 \times 10^{-2}}$
㉢ $e^{-2 \times 10^{-4}}$ ㉣ $e^{-4 \times 10^{-4}}$

해설

$$R(t \geq 100) = \exp[-\lambda_s t]$$

$$= \exp[-(4 \times 10^{-4}) \times 100] = \exp[-4 \times 10^{-2}]$$

여기서, $\lambda_s = \sum \lambda_i = (2 \times 10^{-4}) \times 2 = 4 \times 10^{-4}$

25 어떤 기계를 500시간 작동시키면서 이에 가해지는 여러 가지 스트레스 S_i 에 대한 발생빈도 n_i 를 조사하였더니 다음 표와 같다. 이 기계의 수명은 약 얼마인가?
(단, N_i 값은 파괴될 때까지의 반복횟수이다.)

S_i	S_5	S_4	S_3	S_2	S_1
n_i	0.5	0.8	2.5	4.0	8.3
N_i	3	10	15	30	50

- ㉠ 325시간 ㉡ 521시간
㉢ 701시간 ㉣ 825시간

해설

이 기계의 고장데이터는 일반적으로 지수분포를 따르므로 수명은 $MTBF_S = 1/\lambda_S$ 이다.

그리고 각 스트레스별 고장률을 λ_i 라고 하고, 각 고장횟수는 파괴될 때까지의 반복횟수를 동일조건이 되도록 환산하여 계산한다.

$$\lambda_i = \frac{\text{고장횟수}}{\text{작동시간}} = \frac{r_i (= n_i / N_i)}{500} \text{ 이므로}$$

$$\lambda_5 = \frac{8.3/50}{500} = 3.32 \times 10^{-4},$$

$$\lambda_4 = \frac{4.0/30}{500} = 2.67 \times 10^{-4},$$

$$\lambda_3 = \frac{2.5/15}{500} = 3.33 \times 10^{-4},$$

$$\lambda_2 = \frac{0.8/10}{500} = 1.60 \times 10^{-4},$$

$$\lambda_1 = \frac{0.5/3}{500} = 3.33 \times 10^{-4} \text{ 이고}$$

일반적으로 제품은 그 제품의 기능을 수행하는데 꼭 필요한 부품들만으로 구성되기 때문에 그의 신뢰도는 직렬결합 모델로 표현되므로

$$\lambda_S = \sum \lambda_i = 14.25 \times 10^{-4} \text{ (회/시간)}$$

$$\therefore MTBF_S = \frac{1}{\lambda_S} = \frac{1}{\sum \lambda_i} = \frac{1}{14.25 \times 10^{-4}} \\ = 701.75 \text{ (시간)}$$

(26) 10개 동일부품으로 구성되는 기기를 1,000시간 사용하였을 때 이 기기의 신뢰도가 0.95이었다. 10개의 부품 중 어느 하나라도 고장이 나면 이 기기의 기능은 상실된다. 기기를 구성하고 있는 부품 1개의 고장률은 약 얼마인가? (단, 각 부품의 고장은 지수분포를 한다.)

$$\text{㉠ } 5.12 \times 10^{-5} / \text{시간} \quad \text{㉡ } 5.12 \times 10^{-6} / \text{시간}$$

$$\text{㉢ } 1.05 \times 10^{-4} / \text{시간} \quad \text{㉣ } 1.05 \times 10^{-5} / \text{시간}$$

(해설)

$$R_S = \exp[-\lambda_S t] = \exp[-\sum \lambda_i \times t] \\ = \exp[-10\lambda t] = \exp[-10\lambda \times 1,000] = 0.95 \\ \text{양변에 자연대수를 취하면}$$

$$-10\lambda \times 1,000 = \ln 0.95 = -0.05129$$

$$\therefore \lambda = 5.129 \times 10^{-6} \text{ (/시간)}$$

5.2 병렬결합모델 신뢰도

(01) n 개의 부품이 병렬구조로 구성된 시스템이 있다. 각 부품의 신뢰도함수가 $R_0(t)$ 일 때, 이 병렬구조 시스템의 신뢰도함수 $R(t)$ 를 구하면?

$$\text{㉠ } R(t) = 1 - (1 - R_0(t))^n$$

$$\text{㉡ } R(t) = (1 - R_0(t))$$

$$\text{㉢ } R(t) = R_0(t)^n$$

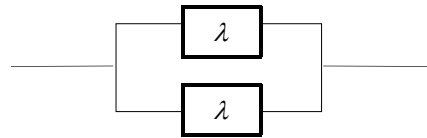
$$\text{㉣ } R(t) = 1 - R_0(t)^n$$

(해설)

n 개 부품이 병렬구조는 부품 A, B 가 병렬 연결시의 시스템신뢰도인

$$R_S = 1 - (1 - R_A)(1 - R_B) \text{ 의 확장이다.}$$

(02) 고장률 λ 를 가지는 리턴던시 시스템을 그림과 같이 병렬로 구성하였을 때 신뢰도함수 $R(t)$ 는?



$$\text{㉠ } \frac{1}{2} \exp(-\lambda t) - \exp\left(-\frac{\lambda t}{2}\right)$$

$$\text{㉡ } \exp(-\lambda t) - \exp\left(-\frac{\lambda t}{2}\right)$$

$$\text{㉢ } 2 \exp(-\lambda t) - \exp\left(-\frac{\lambda t}{2}\right)$$

$$\text{㉣ } 2 \exp(-\lambda t) - \exp(-2\lambda t)$$

(해설)

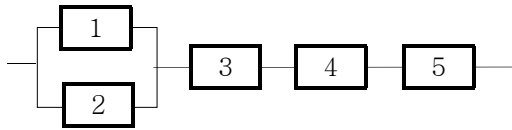
고장시간이 지수분포를 따르는 2개의 부품이 병렬결합한 경우

$$R_s = 1 - (1 - R_i)^2 = 1 - (1 - e^{-\lambda t})^2$$

$$= 1 - (1 - 2e^{-\lambda t} + e^{-2\lambda t}) = 2e^{-\lambda t} - e^{-2\lambda t}$$

03 부품 i 의 신뢰성 중요도는 부품 i 의 신뢰성을 p_i 라 할 때 $\frac{R(p)}{p_i}$ 로 정의된다.

그림과 같은 신뢰성블록도를 갖는 시스템에서 부품 3의 신뢰성 중요도는 얼마인가?
(단, 모든 부품의 신뢰성은 0.9이다.)



- ㉠ 0.8019 ㉡ 0.0801
㉢ 0.891 ㉣ 0.0891

해설

$$R(p) = R_s$$

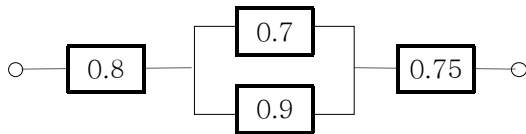
$$= [R_1 + R_2 - R_1 \times R_2] \times R_3 \times R_4 \times R_5$$

$$= [0.9 + 0.9 - 0.9 \times 0.9] \times 0.9^3 = 0.7217$$

부품 3의 신뢰성 중요도

$$= \frac{R(p)}{p_i} = \frac{0.7217}{0.9} = 0.8019$$

04 다음과 같은 직·병렬 모형의 신뢰도를 구하면? (단, □안의 값이 신뢰도임)



- ㉠ 0.681 ㉡ 0.672
㉢ 0.582 ㉣ 0.315

해설

병렬결합부분의 신뢰도

$$R_p = 1 - (1 - 0.7)(1 - 0.9) = 0.97$$

∴ 시스템의 신뢰도

$$R_s = \prod_{i=1}^n R_i = 0.8 \times 0.97 \times 0.75 = 0.582$$

05 고장률이 각각 10^{-3} /시간인 2개의 부품이 병렬로 결합되어 만들어진 기기의 전체 고장률은 얼마인가? (단, 단위는 10^{-4} /시간이다.)

- ㉠ 1.67이하 ㉡ 2.56이하
㉢ 5.54이상 ㉣ 6.70이상

해설

평균고장률이 같은 2개 부품이 병렬결합이 되어 있을 때

$$MTBF_s = \frac{1}{\lambda_s} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\lambda_0} = \frac{3}{2 \times 10^{-3}} = 1,500$$

$$\rightarrow \therefore \lambda_s = 6.67 \times 10^{-4} (\text{/시간})$$

06 $MTTF$ 10,000시간을 갖는 세 개의 부품이 병렬로 연결된 시스템의 $MTTF$ 는 얼마인가?

- ㉠ 1,333.333시간 ㉡ 13,333.333시간
㉢ 18,333.333시간 ㉣ 1,833.333시간

해설

개별부품의 수명을 θ_0 , 시스템의 평균수명

$$\theta_s = MTTF_s = \frac{1}{\lambda_s} \text{이라면,}$$

$$MTTF_s = \frac{1}{\lambda_s} = \sum_{i=1}^n \frac{\theta_0}{i}$$

$$= \theta_0 \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = MTTF_0 \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right)$$

$$= 10,000 \times \frac{11}{6} = 18,333.333 (\text{시간})$$

07 고장률이 동일한 부품 세 개가 병렬로 연결되어 있을 때 시스템고장률은?

- ㉠ $\frac{3}{\lambda}$ ㉡ $\frac{\lambda}{3}$ ㉢ $\frac{11}{6\lambda}$ ㉣ $\frac{6\lambda}{11}$

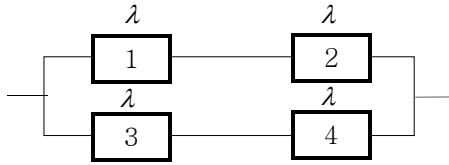
해설

$$MTBF_s = \frac{1}{\lambda_s} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{3\lambda} = \frac{11}{6\lambda}$$

$$\rightarrow \therefore \lambda_s = \frac{6\lambda}{11}$$

08 지수분포의 수명을 갖는 부품 4개를

그림과 같이 연결하였다. 시스템의 평균수명은 얼마인가? (단, 각 부품 고장률은 λ 이다)



- ㉠ $\frac{1}{2\lambda}$ ㉡ $\frac{2}{3\lambda}$ ㉢ $\frac{3}{4\lambda}$ ㉣ $\frac{1}{\lambda}$

해설

수명분포가 지수분포를 따르고, 직렬결합부

$$\text{분의 고장률이 } \lambda_s = \sum_{i=1}^2 \lambda_i = \sum_{i=3}^4 \lambda_i = 2\lambda \text{ 이}$$

므로, 2조의 λ_0 가 병렬결합된 형태가 된다.

$$\therefore \hat{\theta}_s = \frac{1}{\lambda_s} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\lambda_0} = \frac{3}{2 \times 2\lambda} = \frac{3}{4\lambda}$$

09 고장률이 $\lambda = 0.02/\text{시간}$ 으로 일정한 두 부품을 병렬로 결합한 시스템의 평균수명은?

- ㉠ 50시간 ㉡ 75시간
㉢ 100시간 ㉣ 200시간

해설

$$\text{㉣ } MTBF_s = \frac{1}{\lambda_s} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

$$\rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0 \text{ 라면}$$

$$MTBF_s = \frac{3}{2} \times \frac{1}{\lambda_0} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{0.02} = 75(\text{시간})$$

10 어떤 시스템이 6개의 서브시스템을 병렬로 결합되어 구성되었다. $t=100$ 시간에서 각 서브시스템의 신뢰도는 0.90이라 한다.

$t=100$ 시간에서 시스템의 신뢰도는?

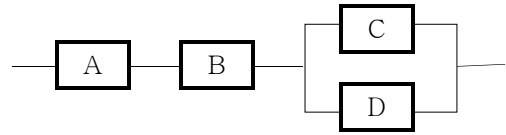
- ㉠ $(1-0.9)^6$ ㉡ $1-(1-0.9)^6$
㉢ $1-(0.9)^6$ ㉣ $(0.9)^6$

해설

병렬결합시스템에서

$$R_s(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i) = 1 - (1 - 0.9)^6$$

11 고장밀도함수가 지수분포를 따를 때 그림과 같이 결합된 시스템의 전체 평균고장률은 얼마인가? (단, $\lambda_A = 0.2 \times 10^{-4}/\text{시간}$, $\lambda_B = 0.7 \times 10^{-4}/\text{시간}$, $\lambda_C = \lambda_D = 0.15 \times 10^{-4}/\text{시간}$)



- ㉠ $0.15 \times 10^{-4}/\text{시간}$ ㉡ $0.2 \times 10^{-4}/\text{시간}$
㉢ $0.7 \times 10^{-4}/\text{시간}$ ㉣ $1 \times 10^{-4}/\text{시간}$

해설

C, D가 병렬결합된 부분에서

$$\frac{1}{\lambda_p} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\lambda_0} = \frac{3}{2 \times (0.15 \times 10^{-4})} = 100,000$$

$$\rightarrow \lambda_p = 0.1 \times 10^{-4}$$

시스템을 직렬결합으로 되면

$$\lambda_s = \lambda_A + \lambda_B + \lambda_p$$

$$= (0.2 + 0.7 + 0.1) \times 10^{-4} = 1 \times 10^{-4} (/ \text{시간})$$

12 동일한 신뢰도를 가진 부품 2개 중 어느 하나만 작동되면 전체가 작동되도록 결합되어 만들어진 장치가 있다. 이 장치의 목표 신뢰도가 0.95가 되려면 각 부품의 신뢰도는 약 얼마이어야 하겠는가?

- ㉠ 0.0500 ㉡ 0.2236
㉢ 0.7764 ㉣ 0.9500

해설

지수분포를 따르는 2개 부품의 병렬결합 때 부품신뢰도

$$R_s = 1 - (1 - R_i)^2 = 0.95 \text{ 에서 } R_i = 0.9764$$

13 동일한 5개 기기(component)로 시스템을 구성하고자 한다(기기고장률= 1.5×10^{-3})

/h). 병렬로 구성한 경우에 시스템이 800시간 이상 작동할 확률을 구하면?

- ㉠ 0.999 ㉡ 0.993 ㉢ 0.833 ㉣ 0.302

해설

개별 기기의 신뢰도는

$$R(t) = e^{-\lambda t} = e^{-(1.5 \times 10^{-3}) \times 800} = e^{-1.2} = 0.3012$$

이므로,

$$\begin{aligned} \therefore R_s &= 1 - \prod_{i=1}^5 (1 - R_i) = 1 - (1 - 0.3012)^5 \\ &= 0.8334 \end{aligned}$$

14 2개의 부품 중 어느 하나만 작동하면 장치가 작동되는 경우 장치의 신뢰도를 0.96 이상이 되게 하려면 각 부품의 신뢰도는 최소 얼마 이상이 되어야 하는가?

(단, 각 부품의 신뢰도는 동일하다.)

- ㉠ 0.76 ㉡ 0.80 ㉢ 0.85 ㉣ 0.90

해설

지수분포를 따르는 2개 부품의 병렬결합 때

$$R_s = 1 - (1 - R_i)^2 \geq 0.96 \text{ 에서 } R_i \geq 0.80$$

15 2개의 부품이 병렬구조로 구성된 시스템이 있다. 각 부품의 고장률이 각각 $\lambda_1 = 0.02$, $\lambda_2 = 0.04$ 일 때 이 시스템의 $MTTF$ 를 구하면?

- ㉠ 75.0 ㉡ 70.5 ㉢ 63.3 ㉣ 58.3

해설

고장시간이 지수분포를 따를 때 2개의 부품이 병렬결합된 경우

$$\begin{aligned} MTTF_s &= \frac{1}{\lambda_s} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \\ &= \frac{1}{0.02} + \frac{1}{0.04} - \frac{1}{0.02 + 0.04} = 58.33 \end{aligned}$$

16 고장시간이 지수분포를 따르고, 평균수명이 100시간인 2개의 부품이 병렬결합모델로 구성되어 있을 때 150시간 후의 신뢰도는 약 얼마인가?

- ㉠ 0.368 ㉡ 0.487 ㉢ 0.513 ㉣ 0.632

해설

고장시간이 지수분포를 따르고 평균수명이 100시간인 2개 부품이 병렬결합되어 있을 때 병렬결합시스템의 $MTBF_s$ 는

$$MTBF_s = \frac{1}{\lambda_s} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \text{ 이고,}$$

상기 식에서 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ 라면 $MTBF_s$ 는

$$MTBF_s = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\lambda_0} \text{ 이 된다.}$$

$$MTBF_s = \frac{1}{\lambda_s} = \frac{3}{2\lambda_0} = \frac{3}{2(1/100)} = 150 \text{ 에서}$$

$$\lambda_s = \frac{1}{150} \text{ 이므로}$$

$$\therefore R(t) = e^{-\lambda_s \cdot t} = e^{-(1/150) \times 150} = 0.368$$

17 고장률이 0.001/시간으로 일정한 장치를 100시간 사용하면 신뢰도는 0.9가 된다. 이 장치 2개를 병렬결합 모델로 결합하여 시스템을 만들었다면 이 장치 1개를 사용한 시스템과 비교시 평균수명은 몇 배로 되는가?

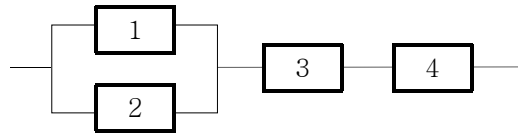
- ㉠ 0.5 ㉡ 1.0 ㉢ 1.5 ㉣ 2.0

해설

2개 장치의 병렬결합인 때

$$MTBF_s = \frac{1}{\lambda_s} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\lambda_0}$$

18 그림과 같은 신뢰성블록도를 갖는 시스템의 $MTTF$ 는 얼마인가? (단, 이들 부품의 $MTTF$ 는 10^4 시간이다.)



- ㉠ 2×10^4 ㉡ $\frac{1}{4} \times 10^4$
 ㉢ $\frac{12}{5} \times 10^4$ ㉣ $\frac{3}{8} \times 10^4$

해설

각 부품의 $MTTF$ 는 동일하므로 고장률을

$\lambda_i = \lambda_0$ 라 두면 부품 1개의

$MTTF_i = \frac{1}{\lambda_0} = 10^4$ 에서 1개 부품의 평균고

장률 $\lambda_i = 10^{-4}$ 이고, 2개 부품의 병렬결합부

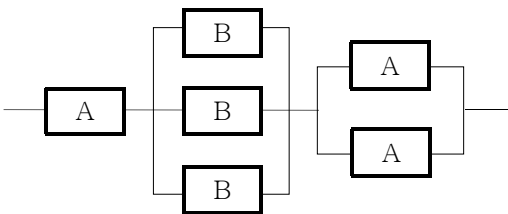
분의 $\frac{1}{\lambda_p} = \frac{3}{2\lambda_0} = \frac{3}{2 \times 10^{-4}}$ 에서 $\lambda_p = \frac{1}{15,000}$

이다. 시스템의 평균고장률은

$$\lambda_s = \lambda_p + \lambda_3 + \lambda_4 = \frac{1}{15,000} + 10^{-4} \times 2 = \frac{1}{3,750}$$

$$\therefore MTTF_s = \frac{1}{\lambda_s} = \frac{1}{1/3,750} = 3,750 \text{ 시간}$$

19 그림에서 시스템의 신뢰도는 약 얼마인가? (단, A와 B의 신뢰도는 각각 0.9와 0.8이다.)



- ㉠ 0.8624 ㉡ 0.8839
㉢ 0.9027 ㉣ 0.9907

해설

부품 B의 병렬결합부분의 신뢰도

$$R_{P_1} = 1 - (1 - 0.8)^3 = 0.992$$

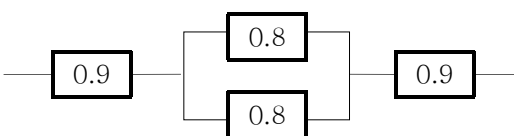
부품 A의 병렬결합부분의 신뢰도

$$R_{P_2} = 1 - (1 - 0.9)^2 = 0.99$$

시스템의 신뢰도

$$R_s = R_A \times R_{P_1} \times R_{P_2} = 0.9 \times 0.992 \times 0.99 = 0.8839$$

20 그림과 같이 구성된 시스템의 신뢰도는?



$$\text{㉠ } 0.9 \times [1 - (1 - 0.8)^2] \times 0.9$$

$$\text{㉡ } 0.9 \times (0.8)^2 \times 0.9$$

$$\text{㉢ } 0.9 + (0.8)^2 \times 0.9$$

$$\text{㉣ } (1 - 0.9) \times (0.8)^2 \times (1 - 0.9)$$

해설

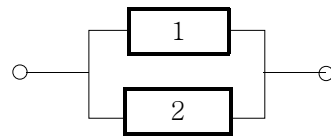
병렬결합부분의 신뢰도 $R_P = 1 - (1 - 0.8)^2$

시스템의 신뢰도 R_s

$$= \prod_{i=1}^n R_i = 0.9 \times [1 - (1 - 0.8)^2] \times 0.9$$

21 지수분포에 따르는 부품 2개를 그림과 같이 병렬로 연결하였을 때 이 시스템의 평균수명은?

(단, 1, 2 부품의 고장률은 각각 λ_1, λ_2 이다.)



$$\text{㉠ } \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

$$\text{㉡ } \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}$$

$$\text{㉢ } \frac{1}{\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}}$$

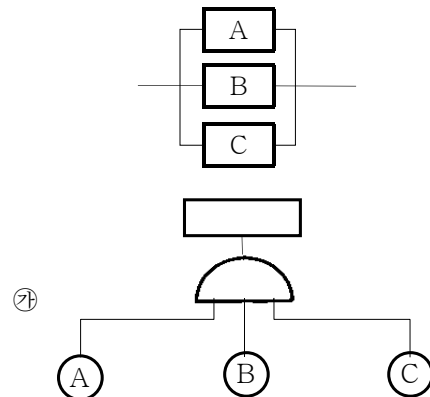
$$\text{㉣ } \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

해설

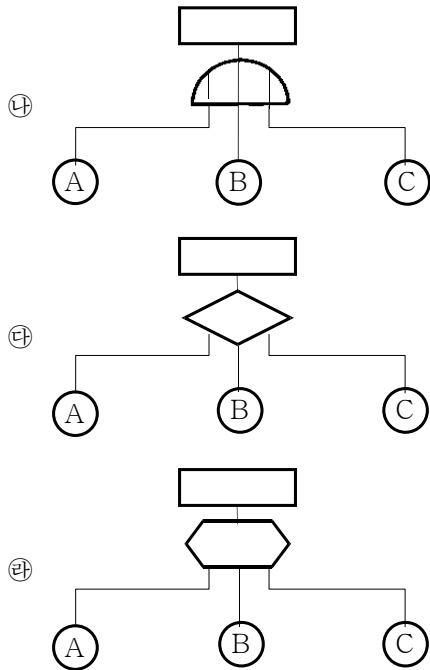
2개 부품의 병렬결합 시스템의

$$MTBF_s = \frac{1}{\lambda_s} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

22 다음 신뢰성 블록도에 맞는 FT도는?

**해답**

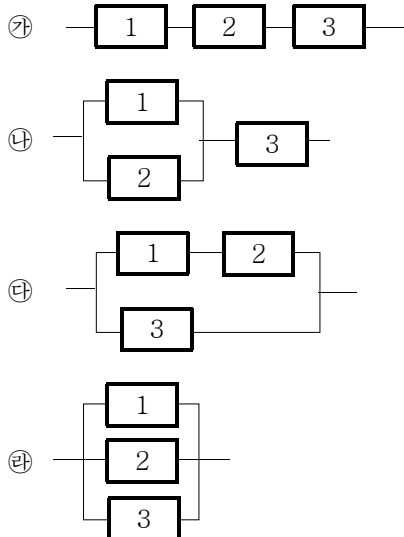
19. ㉡ 20. ㉠ 21. ㉣ 22. ㉠



해설

신뢰성 블록도에서의 병렬연결은 전부 다 고장이 나야 시스템이 고장나므로 FT도에서는 AND gate가 된다.

23) 다음의 시스템에서 개개 부품의 신뢰성이 모두 같다면 시스템의 신뢰성이 가장 높은 것은?



해설

일례로서, 각 부품의 신뢰도를 0.9라 하여 계산해 본다.

가 $R_S = 0.9 \times 0.9 \times 0.9 = 0.729$

나 $R_S = [1 - (1 - 0.9)^2] \times 0.9 = 0.891$

다 $R_S = 1 - (1 - 0.9 \times 0.9)(1 - 0.9) = 0.981$

라 $R_S = 1 - (1 - 0.9)^3 = 0.999$

24) $MTTF$ 가 50,000시간인 세 개의 부품이 병렬로 연결된 시스템의 $MTTF$ 는 약 몇 시간인가?

가 13333.33

나 18333.33

다 47666.47

라 91666.67

해설

라 $MTTF = \frac{1}{\lambda}$ 의 관계식으로부터, 부품의 고장률을 λ_0 라 할 때

$$\begin{aligned} MTTF_S &= \frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{2\lambda_0} + \frac{1}{3\lambda_0} \\ &= \frac{1}{\lambda_0} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) = MTTF_0 \times \frac{11}{6} \\ &= 50,000 \times \frac{11}{6} = 91,666.67 \text{ (h)} \end{aligned}$$

25) 시스템의 $MTBF$ 를 2배로 증가시키기 위해서는 몇 개 이상의 동일 부품을 병렬로 연결하여야 하는가?

(단, 부품의 수명은 지수분포를 따른다.)

가 2

나 3

다 4

라 6

해설

병렬결합 모델의 시스템 신뢰도는

$$MTBF_S = \sum_{i=1}^n \frac{\theta_0}{i} \text{의 관계식으로부터}$$

$$\begin{aligned} MTBF_S &= \sum_{i=1}^4 \frac{\theta_0}{i} \\ &= \theta_0 \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = \theta_0 \times \frac{25}{12} = 2.08\theta_0 \\ &\rightarrow n = 4 \text{ 개이상 필요} \end{aligned}$$

26) 병렬 리던던시(redundancy) 시스템의 목표 설계 평균수명이 약 41,666시간이 되도

록 설계하고자 한다. 고장률이 0.05회/1,000 시간인 부품으로 구성할 때 필요한 부품 수는?

- ㉠ 1개 ㉡ 2개 ㉢ 3개 ㉣ 4개

해설

병렬결합 모델의 시스템 신뢰도에서 n 은 시행착오법으로 구하게 된다.

$$MTBF_S = \sum_{i=1}^n \frac{\theta_0}{i} \text{의 관계식으로부터}$$

$$MTBF_S = \sum_{i=1}^n \frac{\theta_0}{i} = \theta_0 \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) \text{이 된다.}$$

$$\begin{aligned} MTBF_S &= \sum_{i=1}^4 \frac{\theta_0}{i} = \theta_0 \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) \\ &= \theta_0 \times \frac{25}{12} = 2.08\theta_0 \end{aligned}$$

$$MTBF_S = 41,666 \text{이고, } \theta_0 = \frac{1}{\lambda_0} = \frac{1,000}{0.05}$$

이므로 대입하여 봄 $\rightarrow n = 4$ 개이상 필요

27 지수수명분포를 갖는 동일한 컴포넌트를 병렬로 연결하여 시스템 평균수명을 개별 컴포넌트 평균수명의 3배 이상으로 하려면 최소 몇 개의 컴포넌트가 필요한가?

- ㉠ 3개 ㉡ 6개 ㉢ 11개 ㉣ 15개

해설

병렬결합 모델의 시스템 신뢰도는

$$MTBF_S = \sum_{i=1}^n \frac{\theta_0}{i} \text{의 관계식으로부터}$$

$$MTBF_S = \sum_{i=1}^{11} \frac{\theta_0}{i} = \theta_0 \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{11} \right) = 3.02\theta_0$$

$\rightarrow n = 11$ 개이상 필요

28 고장률이 λ 로 동일한 n 개의 부품이 병렬로 연결되어 있을 때 시스템의 평균수명을 표현한 식은?

- ㉠ $\frac{n}{\lambda}$ ㉡ $\frac{\lambda}{n} + \frac{1}{n\lambda}$ ㉢ $\frac{\lambda}{n} - \frac{1}{n\lambda}$

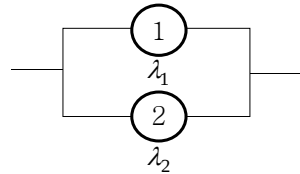
㉣ $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{3\lambda} + \cdots + \frac{1}{n\lambda}$

해설

$$MTBF_S = \sum_{i=1}^n \frac{\theta_0}{i}$$

$$= \theta_0 \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right)$$

29 지수분포를 따르는 부품 2개를 그림과 같이 병렬연결하였다. 시스템의 평균수명은? (단, 각 부품의 고장률은 각각 λ_1 , λ_2 이다.)



㉠ $\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ ㉡ $\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}$

㉢ $\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ ㉣ $\frac{1}{\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}}$

해설

2개 부품의 수명분포가 지수분포를 따르고, 2개 부품이 병렬결합인 경우 시스템의 θ_S 는

$$\theta_S = MTBF_S = \frac{1}{\lambda_S} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} - \left(\frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)$$

30 평균고장률이 동일한 0.001/시간인 장치 2개가 둘 중 어느 하나만 작동하면 기능을 발휘하도록 만들어진 시스템이 있다. 평균수명은 몇 시간인가?

- ㉠ 500 ㉡ 1,000 ㉢ 1,500 ㉣ 2,000

해설

2개 부품의 수명분포가 지수분포를 따르고, 병렬결합인 경우 시스템의 θ_S 는

$$\theta_S = MTBF_S = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\lambda_0} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{0.001} = 1,500 \text{ 시간}$$

5.3 특수결합모델 신뢰도

◆ m route 시스템 신뢰도 ◆

01 규정시간을 사용하였을 때의 부품의 신뢰도가 0.45밖에 되지 않는다. 그런데 이 부품이 사용되는 곳의 신뢰도는 0.95가 되어야 한다. 따라서 병렬리던던시 설계에 의거 이 부품이 사용되는 곳의 신뢰도를 증대시키려고 한다. 신뢰성목표치의 달성을 위해서는 몇 개의 부품을 병렬로 연결하여야 하는가?

- ㉠ 2 ㉡ 3 ㉢ 4 ㉣ 5

해설

부품중복의 m route 병렬리던던시 설계의 경우이며, $R_S = 1 - (1 - R)^m$ 관계식으로부터

$$0.95 = 1 - (1 - 0.45)^m \rightarrow m \log 0.55 = 0.05$$

$$\therefore m = \frac{\log 0.05}{\log 0.55} = 5$$

02 어떤 부품의 요구신뢰도는 0.96인데 시중에서 구입가능한 이 부품의 신뢰도는 0.8밖에 되지 않는다. 이 부품이 사용되는 부분에 병렬리던던시 설계를 사용한다면 요구되는 병렬부품수 n 은?

- ㉠ 1 ㉡ 2 ㉢ 3 ㉣ 4

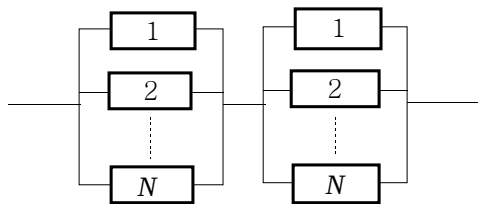
해설

부품중복방식의 병렬리던던시에서 시스템의 신뢰도는

$$R(t) = 1 - (1 - R_i)^n \text{ 에서 } 0.96 = 1 - (1 - 0.8)^n$$

$$\rightarrow \therefore n = \frac{\log 0.04}{\log 0.2} = 2$$

03 다음과 같은 신뢰성 블록도를 갖는 시스템의 신뢰성이 0.999이상 되려면 N 은 최소 얼마 이상이어야 하는가?
(단, 모든 부품의 신뢰성은 0.9이다.)



- ㉠ 2 ㉡ 3 ㉢ 4 ㉣ 5

해설

$$\begin{aligned} \text{㉠ } R_S &= [1 - (1 - R_i)^N]^2 \geq 0.999 \\ &\rightarrow 1 - (1 - R_i)^N \geq \sqrt{0.999} \\ &\rightarrow (1 - R_i)^N \leq 1 - \sqrt{0.999} \\ &\rightarrow N \log(1 - R_i) \leq \log(1 - \sqrt{0.999}) \\ &\rightarrow N \log(1 - 0.9) \leq \log(1 - \sqrt{0.999}) \\ &\rightarrow -N \leq -3.3 \rightarrow N \geq 3.3 \rightarrow N = 4 \text{ 개} \end{aligned}$$

◆ n 중 k 시스템 신뢰도 ◆

04 m/n 계 리던던시에 대한 설명으로 가장 올바른 것은?

- ㉠ $m=1$ 일 때에는 병렬리던던시가 된다.
 ㉡ $m=2$ 일 때에는 병렬리던던시가 된다.
 ㉢ $n-m$ 개의 병렬리던던시를 말한다.
 ㉣ $m=n$ 일 때 병렬리던던시가 된다.

해설

m/n 계 리던던시는 n 중 m (m out of n) 리던던시와 같은 표현 방법이다.

즉, n 중 k (k out of n) 시스템 신뢰도는 n 개 중 k 개만 작동하면 ($1 \leq k \leq n$) 시스템이 작동하는 경우 각 구성품의 신뢰도를 R 이라 하면 시스템 신뢰도는

$$R_S = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} R^i (1 - R)^{n-i} \text{ 이다.}$$

㉣ $m=n$ 이면 직렬리던던시가 된다.

05 다음 중 가장 올바른 내용은 어느 것인가?

- ㉠ n 중 k 시스템에서 $k=1$ 이면 직렬시스템
 ㉡ n 중 k 시스템에서 $k=n$ 이면 병렬시스템
 ㉢ n 중 k 시스템은 k 개 중에서 n 개 이하 작동하면 시스템도 작동한다.

- ㉠ n 중 k 시스템은 n 개 중에서 k 개 이상 작동하면 시스템도 작동한다.

해설

- ㉠ n 중 k 시스템에서 $k=1$ 이면 병렬시스템이다.
 ㉡ n 중 k 시스템에서 $k=n$ 이면 직렬시스템이다.
 ㉢ n 중 $k(k \text{ out of } n)$ 시스템 신뢰도는 n 개 중 k 개만 작동하면($1 \leq k \leq n$) 시스템이 작동하는 경우 각 구성품의 신뢰도를 R 이라 하면 시스템 신뢰도는

$$R_S = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} R^i (1-R)^{n-i} \text{ 이다.}$$

- 06** 엔진의 신뢰도는 0.9이고, 엔진의 반수 이상이 작동되면 비행이 가능할 때 신뢰도가 가장 큰 것은?

- ㉠ 단발비행기 ㉡ 쌍발비행기
 ㉢ 4발비행기 ㉣ 비교 불가능하다.

해설

- ㉠ n 중 k 시스템에서 시스템의 신뢰도 R_S 는

$$R_S = \sum_{i=k}^n {}_n C_i R^i (1-R)^{n-i} \text{의 관계식으로부터}$$

$1 \leq k \leq n$ 의 조건에서 쌍발비행기는 $k \geq 1$, 4발비행기는 $k \geq 2$ 이면 반수이상 작동되므로

- ㉠ 단발비행기 : 0.9

- ㉡ 쌍발비행기($k \geq 1$) :

$${}_2 C_1 \times 0.9^1 \times 0.1^1 + {}_2 C_2 \times 0.9^2 \times 0.1^0 = 0.99$$

- ㉢ 4발비행기($k \geq 2$) :

$${}_4 C_2 \times 0.9^2 \times 0.1^2 + {}_4 C_3 \times 0.9^3 \times 0.1^1$$

$$+ {}_4 C_4 \times 0.9^4 \times 0.1^0 = 0.9963$$

- 07** 3 중 2 중복시스템에서 부품이 모두 고장률 λ 인 지수분포를 따른다면, 시간 t 에서 이 시스템의 신뢰도는?

- ㉠ $e^{2\lambda t} (1 + 2e^{\lambda t})$

- ㉡ $e^{-2\lambda t} (3 + 2e^{-\lambda t})$

- ㉢ $e^{-\lambda t} (3 + 2e^{-2\lambda t})$

- ㉣ $e^{-2\lambda t} (3 - 2e^{-\lambda t})$

해설

- ㉠ 고장률이 λ 인 지수분포를 따르면, 신뢰도

$R = e^{-\lambda t}$ 이고, n 중 k 시스템의 신뢰도

$$R_S = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} R^i (1-R)^{n-i} \text{에서 2 out of 3}$$

시스템의 신뢰도는 $(3-2R)R^2$ 이다.

$$R_S = \sum_{i=2}^3 {}_3 C_i R^i (1-R)^{3-i}$$

$$= {}_3 C_2 R^2 (1-R)^1 + {}_3 C_3 R^3 (1-R)^0$$

$$= 3R^2(1-R) + R^3 = R^2(3-2R)$$

$$= e^{-2\lambda t} (3 - 2e^{-\lambda t})$$

$$\text{여기서, } {}_3 C_2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{(2 \times 1) \times 1} = 3,$$

$${}_3 C_3 = 1$$

- 08** 각 요소의 신뢰도가 0.9인 3중 2(2 out of 3) 시스템의 신뢰도를 구하면?

- ㉠ 0.9437 ㉡ 0.9963

- ㉢ 0.972 ㉣ 0.81

해설

$$R_S = \sum_{i=2}^3 \binom{3}{i} R^i (1-R)^{3-i}$$

$$= \binom{3}{2} 0.9^2 (1-0.9)^{3-2} + \binom{3}{3} 0.9^3 (1-0.9)^{3-3}$$

$$= 0.972$$

여기서,

$$\binom{3}{2} = {}_3 C_2 = \frac{3!}{2! \times (3-2)!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{(2 \times 1) \times 1} = 3,$$

$${}_3 C_3 = 1$$

또는

$$R_S = (3-2R)R^2 = (3-2 \times 0.9) \times 0.9^2 = 0.972$$

09 n 중 k 시스템에서 각 부품 신뢰도가 $R(t) = e^{-\lambda t}$ 일 때 시스템의 평균수명은?

- ㉠ $\frac{\lambda}{kn}$ ㉡ $\lambda \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{n} \right)$
 ㉢ $\frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{n} \right)$
 ㉣ $\frac{1}{\lambda \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{n} \right)}$

해설

만일 $R(t) = e^{-\lambda t} = e^{-t/\theta}$ 의 지수분포에 따르면 시스템 $MTBF_S$ 는 다음과 같이 된다.

$$MTBF_S (= \theta_S) = \sum_{i=k}^n \frac{\theta}{i} = \theta_0 \cdot \sum_{i=k}^n \frac{1}{i}$$

$$= MTBF_0 \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

10 신뢰도가 0.9인 부품 2개를 결합하여 만든 장치가 2개 부품 중 어느 하나만 작동하면 기능을 발휘한다고 할 때 이 장치의 신뢰도는 약 얼마인가?

- ㉠ 0.19 ㉡ 0.81 ㉢ 0.90 ㉣ 0.99

해설

n 개 중 k 개만 작동하면 ($1 \leq k \leq n$) 시스템이 작동하는 n 개 중 k 시스템인

$$R_S = \sum_{i=k}^n {}_n C_i R^i (1-R)^{n-i} \text{의 관계식에서}$$

2개 중 하나만 작동하면 시스템이 작동하는 2 중 1 시스템 신뢰도의 경우이다.

$$R_S = {}_2 C_1 (0.9)^1 (0.1)^1 + {}_2 C_2 (0.9)^2 (0.1)^0 = 0.99$$

11 각 부품의 신뢰도는 r 로 동일한 경우, 5 중 4 시스템의 신뢰도는?

- ㉠ $3r^2 - 2r^3$ ㉡ $4r^5 - 5r^4$
 ㉢ $5r^4 - 4r^5$ ㉣ $5r^5 - 4r^4$

해설

$$R_S = \sum_{i=k}^n {}_n C_i R^i (1-R)^{n-i} \text{의 관계로부터}$$

$$\begin{aligned} R_S &= \sum_{i=4}^5 {}_5 C_i r^i (1-r)^{5-i} \\ &= {}_5 C_4 r^4 (1-r)^1 + {}_5 C_5 r^5 (1-r)^0 \\ &= 5r^4 (1-r)^1 + r^5 = 5r^4 - 5r^5 + r^5 \\ &= 5r^4 - 4r^5 \end{aligned}$$

12 하나의 부품신뢰도가 R 인 n 중 k 구조(k out of n redundancy)의 시스템신뢰도는? (단, $1 \leq k \leq n$)

- ㉠ $\sum_{y=k}^n \binom{n}{y} R^y (1-R)^{n-y}$
 ㉡ $\binom{n}{k} R^k (1-R)^{n-k}$
 ㉢ $1 - \sum_{y=0}^k \binom{n}{y} R^y (1-R)^{n-y}$
 ㉣ $\sum_{y=k}^n \binom{n}{y} (1-R)^y R^{n-y}$

해설

n 개 중 k 개 시스템의 신뢰도

$$R_S = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} R^i (1-R)^{n-i} \text{와 비교하면 편리.}$$

13 아이템의 신뢰도가 모두 0.9인 3 out of 4 시스템의 신뢰도는 약 얼마인가?

- ㉠ 0.996 ㉡ 0.972
 ㉢ 0.948 ㉣ 0.812

해설

$$\begin{aligned} R_S &= \sum_{i=3}^4 \binom{4}{i} R^i (1-R)^{4-i} \\ &= \left(\text{또는} \sum_{i=3}^4 {}_4 C_i R^i (1-R)^{4-i} \right) \\ &= \binom{4}{3} 0.9^3 (1-0.9)^{4-3} + \binom{4}{4} 0.9^4 (1-0.9)^{4-4} \\ &= 0.9477 \end{aligned}$$

여기서, $\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!}$, $\binom{4}{4} = \frac{4!}{4!(4-4)!}$

◆ 대기결합모델 시스템 신뢰도 ◆

14 여분의 부품이 처음부터 병렬로 연결되어 있지 않고 처음에는 부품1이 그 기능을 수행하다가 이것이 고장나면 여분의 부품2가 그의 기능을 인계받아 계속 기능을 수행하도록 결합되어 있는 구조는?

- ㉠ 병렬구조 ㉡ n 중 k 구조
㉢ 직렬구조 ㉣ 대기결합구조

해설

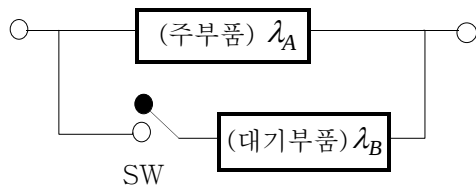
㉣ 대기결합모델로 시스템을 구성하면 신뢰도가 증가하게 되는 성질을 대기리던던시라고 한다.

15 두 개의 부품 A와 B로 구성된 대기시스템이 있다. 두 부품의 고장률은 각각 $\lambda_A = 0.02$, $\lambda_B = 0.03$ 이다. 50시간까지 시스템이 작동할 확률은 약 얼마인가? (단, 스위치의 작동확률은 1.00으로 가정한다.)

- ㉠ 0.264 ㉡ 0.343
㉢ 0.657 ㉣ 0.736

해설

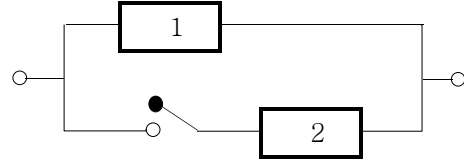
대기시스템의 신뢰도 계산 : λ_A, λ_B 가 서로 다를 경우



$$\begin{aligned} R_S &= \frac{1}{\lambda_A - \lambda_B} (\lambda_A e^{-\lambda_B T} - \lambda_B e^{-\lambda_A T}) \\ &= \frac{1}{0.02 - 0.03} (0.02 \times e^{-0.03 \times 50} - 0.03 \times e^{-0.02 \times 50}) \\ &= 3e^{-1} - 2e^{-1.5} = \frac{3}{e} - \frac{2}{e^{1.5}} = 0.657 \end{aligned}$$

16 동일한 고장률 λ 를 갖는 부품 2개를 그림과 같이 대기구조로 설계하였다. 각 부품의 고장분포는 지수분포이고 2번 부품이 대기부품이다. 시스템의 신뢰도함수는?

(단, 스위치(switch) 신뢰도 $R_{SW} = 1$)



- ㉠ $e^{-2\lambda t}$ ㉡ $e^{-\lambda t} + e^{-2\lambda t}$
㉢ $e^{-\lambda t} + \lambda t e^{-2\lambda t}$ ㉣ $e^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t}$

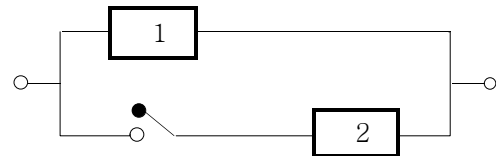
해설

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ 이고, 전환스위치 신뢰도 R_{SW} 를 고려한 경우

$$R_S = (1 + R_{SW} \times \lambda t) e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t}$$

(단, $R_{SW} = 1$)

17 다음 그림과 같이 스위치 시스템의 신뢰도 R_{SW} 가 1일 때 대기리던던시 시스템의 신뢰도 함수 $R(t) = (1 + \lambda t) \exp(-\lambda t)$ 이다. 고장률 λ 가 0.01회/시간일 때 이 시스템의 평균수명을 구하면 몇 시간인가?



- ㉠ 300 ㉡ 200 ㉢ 150 ㉣ 100

해설

수명분포가 지수분포를 따르는 경우이며, 시

$$\text{시스템 평균수명 } \overline{MTBF} = \frac{2}{\lambda} = \frac{2}{0.01} = 200 \text{ 시간}$$

18 지수분포를 따르는 수명을 갖고 평균 고장률이 0.0001회/시간인 발전기를 1,000시간 사용하면 신뢰도가 0.905가 된다.

만일 발전소의 신뢰도를 높이기 위해 동일한 발전기 한 대를 대기리던던시 설계로 설치하였다면 발전소의 1,000시간에서의 신뢰도는 얼마인가?

(단, 전환스위치 신뢰도는 100%이다.)

- ㉠ 0.8100 ㉡ 0.9050
㉢ 0.9910 ㉣ 0.9955

해설

스위치가 있는 대기리던던시 시스템 신뢰도

$$R_s(t=1,000) = (1 + R_{sw} \times \lambda t) R(t) \\ = (1 + 0.0001 \times 1,000) \times 0.905 = 0.9955$$

19 평균수명이 3,000시간인 발전기 2대가 대기결합 모형으로 구성되어 있으며 전환스위치의 신뢰도는 100%이다. 이 발전기 시스템의 평균수명은 몇 시간인가?

(단, 발전기의 수명분포는 지수분포를 따른다고 가정한다.)

- ㉠ 1,500시간 ㉡ 3,000시간
㉢ 4,500시간 ㉣ 6,000시간

해설

주부품 1개를 포함한 총부품수가 n 개로 구성된 대기중복시스템에서 각 부품의 수명시간 t 가 평균고장률 λ_0 인 지수분포를 따른다고 할 때 $MTBF_s = \frac{1}{\lambda_0} \times n = MTBF_0 \times n$ 의 관계식으로부터 $n=2$ 이면 $MTBF_s$ 는 2배로 증가한다.

따라서 $MTBF_s = 2 \times MTBF_0 = 2 \times 3,000 = 6,000$ (시간)

일반적으로 $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda$ 인 n 개의 부품이 대기결합구조로 구성된 경우

$$MTBF_s = \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} + \dots \right)_{n\text{개}} = \frac{n}{\lambda}$$

20 대기시스템에서 대기 중인 부품의 고장률을 0으로 가정하는 시스템을 무엇이라 하는가?

- ㉠ hot stand-by
㉡ cold stand-by

㉢ warm stand-by

㉣ on-going stand-by

해설

cold stand-by(냉대기)는 대기중인 부품이 절환시까지 동작의 정지 또는 휴지 상태로 있는 것이다.

21 대기구성요소를 늘 동작상태로 놓고 언제라도 절환할 수 있도록 되어 있는 것은?

- ㉠ 열대기 ㉡ 온대기
㉢ 냉대기 ㉣ 한대기

해설

대기리던던시에는 냉대기, 열대기, 온대기가 있다. 냉대기는 전원이 끊어진 상태에서의 대기, 온대기는 전원만 연결된 상태에서의 대기이다.

22 대기 구성요소가 절환시까지 동작의 정지 또는 휴지상태로 있는 것을 의미하는 용어는?

- ㉠ 열대기 ㉡ 온대기
㉢ 냉대기 ㉣ 병렬대기

해설

cold stand-by(냉대기)는 대기중인 부품이 절환시까지 동작의 정지 또는 휴지상태로 있는 것이다.

23 2개 부품을 대기중복으로 설계하는 경우 전환스위치의 신뢰도가 100%라면 전체시스템의 평균수명은 몇 배로 증가하는가?

(단 구성부품의 고장률은 λ 임)

- ㉠ 1.5배 ㉡ 2배
㉢ $(1 + \lambda t)$ 배 ㉣ λt 배

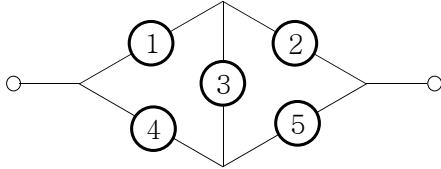
해설

주부품 1개를 포함한 총부품수가 n 개로 구성된 대기중복시스템에서 각 부품의 수명시간 t 가 평균고장률 λ_0 인 지수분포를 따른다고 할 때 $MTBF_s = \frac{1}{\lambda_0} \times n = MTBF_0 \times n$ 의

관계식으로부터 $n=2$ 이면 $MTBF_S$ 는 2배로 증가한다.

◆ 브리지구조 시스템 신뢰도 ◆

24 5개의 부품을 그림과 같이 연결하였다. 다음 부품의 집합 중 cut이 아닌 것은?

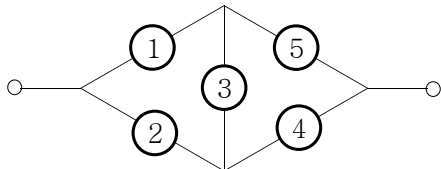


- ㉠ {①, ②} ㉡ {①, ④}
 ㉢ {②, ③, ⑤} ㉣ {②, ⑤}

해설

- ㉠ {①, ②}를 끊어도 시스템은 작동된다.
 따라서 {①, ②}는 pass이다.
 cut인 경우 : {①, ④}, {②, ⑤}, {①, ③, ④}, {②, ③, ⑤}
 pass인 경우 : {①, ②}, {④, ⑤}, {①, ③, ⑤}, {④, ③, ②}

25 다음 브리지구조에서 극소패스(minimal path)가 아닌 것은?



- ㉠ {1, 5} ㉡ {4, 5}
 ㉢ {1, 3, 4} ㉣ {2, 3, 5}

해설

- pass는 시스템의 연결, cut은 시스템의 단절을 의미한다.
 극소패스(minimal pass) 집합은 {1, 5}, {2, 4}이고, ㉡는 최소절단(minimal cut)에 해당한다.