제 9 장

불확실·상충하의 OR기법

설례 9.01 의사결정론의 의사결정 과정

* 의사결정론(decision theory)은 대안 실행에 따른 결과가 확실하지 않은 상황에서의 의사결정에 대한 일반적인 접근법이 됨.

* 공정, 생산능력, 입지, 재고 등에 관한 의사결정이 불확실한 미래를 대상으로 하는 것이므로 이러한 접근법은 생산관리 분야에도 도움이 될 것임. 물론 다른 기능 분야에도 널리 활용되고 있음.

* 의사결정론에 따르면 다음의 과정으로 의사결정을 수행하게 됨.
  ① 가능한 대안(alternative)을 나열함.
    * 이 과정에서 아무 행동도 취하지 않는 것도 기준이 되는 하나의 대안으로 고려해야 함.
    * 아래에서는 대안의 개수가 유한하다고 가정함.
    예를 들어 새로운 소매점포의 입지를 고려할 때 논리적으로는 도시의 지도상에 있는 모든 점이 대상이 될 수 있겠으나, 현실적으로는 몇 군데에 한정시켜서 생각할 것임.

  ② 선정된 대안의 결과에 영향을 미치나 의사결정자의 영향력 밖에 있는 사건(event)-확률적 사건(chance event) 또는 자연의 상태(state of nature)라고도 함-을 나열함.
    * 예를 들어 새로운 설비에 대한 수요의 대소는 입지의 편리성 뿐만 아니라 경쟁상황과 일반적인 경기에도 영향을 받을 것임. 이러한 사건들을 의미있게 범주화함.
    예를 들어서 하루의 평균매상이 1부터 500사이라고 한다면 이때 500개의 사건을 대상으로 하는 것이 아니고, 일자별 매상을 100, 300, 500으로 크게 3개의 사건을 구성하는 것임. 이때 사건들은 겹치지 말아야 하고, 합치면 전체를 나타낼 수 있어야 함.

  ③ 각 대안별로 각 사건에 대한 보상(payoff)을 계산함.
    * 대개의 경우 보상은 총이익이거나 총비용이 됨.
    * 이러한 보상을 보상행렬(payoff table)이라고 하는 양식에 정리함.
    대안이 3가지이고 사건이 4가지인 경우 이 행렬은 12개의 원소를 가짐.
    화폐의 시간적 가치를 무시하는 것이 심각한 왜곡요인이라고 생각되면 보상은 현재가치나 내부수익률에 의해 표시하여야 함. 질적인 요소를 포함한 다수의 기준을 고려하여야 하는 경우라면 선호도 행렬 접근법의 가중평균 점수를 보상으로 이용할 수도 있음.

  ④ 과거 자료, 전문가 견해, 예측기법 등을 이용하여 각 사건의 확률(발생가능성)을 추정.
    * 이를 확률(probability)의 형태로 표현하되, 전체의 합이 1이 되도록 유의함. 과거가 미래에 대한 좋은 지표라면 과거의 비율을 기준으로 확률을 추정하면 됨.

  ⑤ 비용의 기대치가 가장 적은 대안을 선택한다거나 하는 의사결정 규칙(decision rule)을 정함.

* 의사결정 규칙의 선정은 사건의 확률에 대해 보유하고 있는 정보의 양과 위험에 대한 경영자의 태도에 따라 달라짐.

설례 9.02 불확실한 상황하의 의사결정기법 [공기1회] [경지4회]

(1) 머리말

* 불확실한 상황이란 대안에 따른 출현가능한 결과의 일부나 전부를 알 수는 있지만, 이들 각각의 결과가 나타날 확률을 알 수 없는 상황임.
* 광의의 불확실한 상황하의 의사결정
  =부분확률일 경우의 의사결정+협의의 불확실한 상황하의 의사결정

(2) 부분확률일 경우의 의사결정기법의 과정

① 부분확률의 입수

* 투자안 A, B, C 중 한 가지를 내년도의 경제적 조건 (가), (나), (다)라는 상황을 예측하여 투자시 일례로 부분확률 (나)가 나타날 확률을 입수할 수 있어야 함.

② 각 대안별 무차별 확률의 계산

* ①에서 A와 B가 무차별하게 될 (가)와 (다)의 발생확률, A와 C가 무차별하게 될 (가)와 (다)의 발생확률, B와 C가 무차별하게 될 (가)와 (다)의 발생확률을 구함.

③ 도시 및 판단

* ②의 결과를 도시(圖示)하고, 예상확률별로 최적의 대안을 선택함.

(3) 협의의 불확실한 상황하에서의 의사결정기법

* 여기에서는 경영자가 미래의 사건을 나열할 수는 있지만 그 확률을 추정할 수 없다고 가정함. 과거의 경험이 전무하다든가 하면 미래의 확률을 추정하기 조차 매우 어려울 수 있음.
* 이런 경우에는 다음의 다섯 가지 의사결정 규칙을 이용하게 됨.

(가) 라플라스(Laplace) 준거

* 미래의 가능한 각 상황에 대하여 동일한 확률을 부여하여 각 대안별 기대값을 계산하고, 그 중에서 최대이익액을 가져오는 대안을 선택하는 것.
* 보상의 가중평균이 가장 좋은 대안을 선정함. 가중치는 모든 사건에 동일하게 부여함. 즉, 동일한 확률 추정치를 이용함. 사건의 수가 n가지라면 각 사건의 가중치(확률)는 $1/n$이 되어 다 합하면 1이 됨. 이 규칙은 현실주의적임.

(나) 맥시민(maximin) 준거 (최대최소 준거) (Wald 기준) [공기1회]

* 미래의 발생사상에 관하여 비관적인 견해를 가진 자에게 적용함.
* 모든 최소이익액을 비교하고, 이들 최소이익액 중에서 최대치를 가져오는 대안을 선택하는 것임.
* 최악의 경우가 가장 좋은 대안을 선정함. 이 규칙은 모든 대안에 대해 최악의 경우를 상정하는 비관주의적인 규칙임. Wald가 제창했음.

(다) 맥시맥스(maximax) 준거 (최대최대 준거)

* 미래의 발생사상에 관하여 낙관적인 견해를 가진 자에게 적용함.
* 모든 최대이익액을 비교후, 최대이익액 중 최대치를 가져오는 대안을 선택하는 것임.
* 최선의 경우가 가장 좋은 대안을 선정함. 이 규칙은 기대치가 높고 투기성이 높은 낙관주의적 규칙임.

(라) 최소최대후회(minimax regret) 준거 (최소최대유감 준거) (Savage 기준) [공기1회]

* 이는 L. J. Savage(사베지)가 제창했음.
* 최소최대유감 준거는 줄여서 유감 준거라고도 함.
* 최대이익액과 나머지 이익액과의 차액을 계산함으로써 유감표를 작성하고, 최대유감액 중에서 최소치를 가져오는 대안을 선택하는 것임.
* 최악의 후회가 가장 좋은 대안을 선정함. 이를 위해 먼저 후회(기회상실) 행렬을 작성함. 이 행렬의 각 행은 대안을 나타내고 각 열은 사건을 나타내는데, 후회란 현재 대안의 보상과 동일한 열에 있는 보상 중 가장 좋은 값과의 차이임. 즉 주어진 사건 하에서 최선의 대안에 비해 얼마나 손해를 보는가를 나타내는 값이 됨. 이는 상황에 따라 이익의 상실이 될 수도 있고 비용의 증가가 될 수도 있음.

(마) 후르비츠 준거

* 이는 맥시민 준거와 맥시맥스 준거를 절충한 것으로서, 의사결정자는 비관과 낙관의 양극단에 있는 것이 아니라, 어느 정도는 비관, 어느 정도는 낙관적이라고 전제함.
* 낙관도는 낙관계수 σ 로 측정하고, $0 \le \sigma \le 1$ 이며, $\sigma = 0$ 은 완전비관, $\sigma = 1$ 은 완전낙관임. 비관계수는 $1-\sigma$ 임.
* 후르비츠 준거의 과정
  ① σ 를 정확히 알 수 있는 경우 : 최대이익액$\times\sigma$, 최소이익액$\times(1-\sigma)$ 하여, 각 대안의 화폐예측치를 구하여, 이들 중 최대치를 선정
  ② σ 를 알 수 없는 경우 : $\sigma = 0$, $\sigma = 1$ 을 양극단으로 하여 화폐예측치를 계산하여 그래프에 표시하고, 각 대안의 최대이익액과 최소이익액을 일직선으로 연결하여 교차점을 결정한 후 σ 를 도출한 다음, 의사결정자가 σ 의 범위 내에 있는가를 질문하여 최적해를 선택함.

예제 01 **불확실성하에서의 의사결정 사례** [공기2회]

* 한 경영자가 설비를 대형으로 지을지 소형으로 지을지 의사결정을 수행하고 있다.
* 이 의사결정의 성패는 이 설비에 대한 미래의 수요에 달려 있으며, 수요가 낮거나 높을 수 있다. 경영자는 각 대안에 대해 각 상황마다 보상을 아래의 보상행렬에 있는 것처럼 확실하게 알 수 있다.
* 여기에서 보상은 각 대안별로 각 사건이 발생했을 때의 수익에서 비용을 뺀 금액의 현가이다. 아래 표의 보상행렬하에서, 위의 각 규칙에 따른 최선의 대안은 무엇인가?

수요 / 대안	미래 수요 (단위 : 천달러)	
	낮음	높음
소형설비	200	270
대형설비	160	800
현상유지	0	0

해설

① **맥시민(최대최소) 준거** : 대안별로 최악의 경우란 보상행렬의 각 행에서 가장 작은 수치를 말함. 최악의 보상은 아래 표와 같으며, 이 중 최선의 것은 소형설비의 200,000달러임. 따라서 비관주의자는 소형설비를 지을 것임.

대안 \ 보상	최악의 보상 (천달러)
소형설비	200
대형설비	160

② **맥시맥스(최대최대) 준거** : 대안별로 최선의 경우란 보상행렬의 각 행에서 가장 큰 수치를 말함. 최선의 보상은 아래 표와 같으며, 이 중 최선의 것은 대형설비의 800,000달러임. 따라서 낙관주의자는 대형설비를 지을 것임.

대안 \ 보상	최선의 보상 (천달러)
소형설비	270
대형설비	800

③ **라플라스 준거** : 사건이 두 가지이므로 각각에 0.5의 확률을 부여함. 그러면 가중평균한 보상은 아래의 표와 같으며, 이때 최상의 가중평균 보상은 480,000달러임.
그러므로 현실주의자는 대형설비를 지을 것임.

대안	가중평균 보상
소형설비	0.5(200)+0.5(270)=235
대형설비	0.5(160)+0.5(800)=480

④ **최소최대후회 준거** : 실제수요가 낮았다면 이 경우 최선의 대안은 소형설비이며 이때의 후회는 0(=200-200)가 됨. 만약 대형설비를 지었는데 수요가 낮았다면 이때의 후회는 40(=200-160)임. 아래 표에서 가장 오른쪽 열은 각 대안의 최악의 후회를 나타냄.
최악의 후회를 최소로 하려면 대형설비를 지어야 할 것임.
최악의 후회는 소형설비를 지어 놓았는데 수요가 높은 경우임.

대안 \ 보상	후회		최대후회
	수요 낮음	수요 높음	
소형설비	200-200=0	800-270=530	530
대형설비	200-160=40	800-800=0	40

예제 02 **보상행렬 사례** [공기1회]

* P씨는 꽃집을 운영하고 있음. 꽃의 공급업자는 E시에 있으며, 필요한 양은 3일 전에 주문해야 함. 발렌타인 데이가 가까와 오고 있는데 아직 발렌타인 데이의 장미에 대한 수요가 적은 수준(25박스)일지, 중간 수준(60박스)일지, 많은 수준(130박스)일지 감을 잡지 못하고 있다. P씨는 장미를 박스당 15달러에 구입해서 40달러에 판매한다.

설례 9.03 **불확실성하의 의사결정 문제풀이1 (5개기준 활용)**

* R사는 세 개의 투자안 중에서 하나를 골라 투자하려고 한다. 각 경제 상황에 따른 투자안의 이익은 다음과 같다. 아래의 기준을 사용할 때 최적투자 계획을 결정하라.

경제상황 / 대안	1	2	3
A	6,000	8,000	4,000
B	-1,000	11,000	7,000
C	5,000	5,000	5,000

(1) 최대최대 (2) 최대최소 (3) 최소최대후회 (4) 라플라스 (5) 후르비쯔(α=0.4)

(6) 기대가치(P(1)=30%, P(2)=50%, P(3)=20%)

(7) 기대기회손실(P(1)=30%, P(2)=50%, P(3)=20%)

(8) 완전정보의 기대가치(EVPI)를 구하라.

해설

(1) 최대최대 : 최적대안=B

경제상황 / 대안	1	2	3	최대	최대최대
A	6,000	8,000	4,000	8,000	
B	-1,000	11,000	7,000	**11,000**	11,000
C	5,000	5,000	5,000	5,000	

(2) 최대최소 : 최적대안=C

경제상황 / 대안	1	2	3	최소	최대최소
A	6,000	8,000	4,000	4,000	
B	-1,000	11,000	7,000	-1,000	
C	5,000	5,000	5,000	**5,000**	5,000

(3) 최소최대후회 : 최적대안=A

경제상황 / 대안	1	2	3	최대후회	최소 최대후회
A	6,000-6000 =0	11,000-8,000 =3,000	7,000-4,000 =3,000	**3,000**	3,000
B	6000+ 1,000 =7,000	11,000-11,000 =0	7,000-7,000 =0	7,000	
C	6,000-5,000 =1,000	11,000-5,000 =6,000	7,000-5,000 =2,000	6,000	

(4) 라플라스 : 최적대안=A

경제상황 / 대안	1	2	3	평균	최대평균
A	6,000	8,000	4,000	**6,000**	6,000
B	-1,000	11,000	7,000	5,667	
C	5,000	5,000	5,000	5,000	

(5) 후르비쯔(α =0.4) : 최적대안=A

대안	최대성과	최소성과	가중치
A	8,000	4,000	8,000(0.4)+ 4,000(0.6)=**5,600**
B	11,000	-1,000	11,000(0.4)-1,000(0.6)=3,800
C	5,000	5,000	5,000(0.4)+ 5,000(0.6)=5,000

(6) 기대가치 : 최적대안=A 또는 B

대안	기대가치
A	6,000(0.3)+ 8,000(0.5)+ 4,000(0.2)=**6,600**
B	-1,000(0.3)+ 11,000(0.5)+ 7,000(0.2)=**6,600**
C	5,000(0.3)+ 5,000(0.5)+ 5,000(0.2)=5,000

(7) 기대기회손실 : 최적대안=A 또는 B

대안	기대기회손실
A	0(0.3)+ 3,000(0.5)+ 3,000(0.2)=**2,100**
B	7,000(0.3)+ 0(0.5)+ 0(0.2)=**2,100**
C	1,000(0.3)+ 6,000(0.5)+ 2,000(0.2)=3,700

(8) 완전정보의 기대가치(EVPI)

EVPI=8,700-6,600=2,100

여기서, 완전정보에 의해 선정되는 대안들의 기대가치

=6,000(0.3)+ 11,000(0.5)+ 7,000(0.2)=8,700 (문제의 조건 표 참조)

사전확률에 의해 선정되는 최적대안의 기대가치=6,600 ((6)항 풀이 참조)

설례 9.04 **불확실성하의 의사결정 종합문제 문제풀이 2**

* 건설의 규모와 수요의 상황에 따른 예상이익이 다음 표와 같다.

대안 \ 상황	s_1(낮음)	s_2(보통)	s_3(높음)
d_1(소규모)	400	400	400
d_2(중규모)	100	600	600
d_3(대규모)	-300	300	900

(1) 다음 기준에 의하여 최적대안을 결정하라.

maximin, maximax, minimax후회, 라플라스, 후르비쯔(α =0.6)

(2) $P(s_1)$ =0.2, $P(s_2)$ =0.35, $P(s_3)$ =0.45라고 할 때 EV기준과 EOL기준에 의한 최적대안을 구하라. (단, EOL(expected opportunity loss)는 기대기회손실)

(3) 완전정보의 기대가치(EVPI)는 얼마인가? (4) 의사결정 나무를 그리고 최적결정을 구하라.

해설

(1) 성과표

상황 / 대안	s_1	s_2	s_3	최대최대	최대최소	라플라스	후르비쯔	EV
d_1	400	400	400	400	400	400	400	400
d_2	100	600	600	600	100	433.33	520	500
d_3	-300	300	900	900	-300	300	700	450
최대				900	400	433.33	700	500
최적대안				d_3	d_1	d_2	d_3	d_2

(2) 기회비용표

상황 / 대안	s_1	s_2	s_3	최대후회 1)	EOL
d_1	0	200	500	500	295 2)
d_2	300	0	300	300	195
d_3	700	300	0	700	245
최소				300	195
최적대안				d_2	d_2

[참조] 1) 후회=기회비용 2) 0(0.2)+200(0.35)+500(0.45)=295

(3) EVPI=①-②=695-500=195

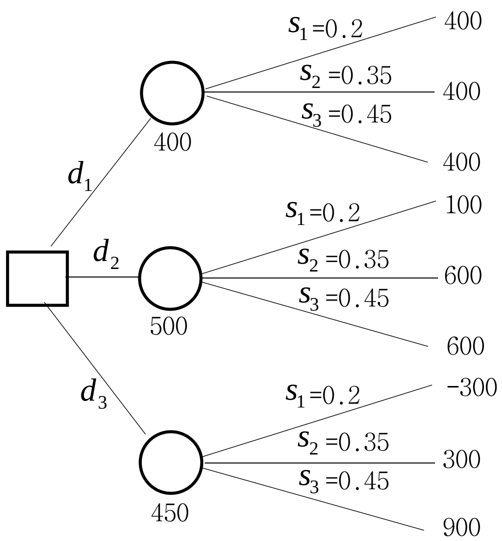
여기서, ① 완전정보에 의해 선정되는 대안들의 EV

=400(0.2)+600(0.35)+900(0.45)=695

② 사전확률에 의해 선정되는 최적대안의 EV

=100(0.2)+600(0.35)+600(0.45)=500

(4) 최적대안=d_2



[주 3] 300,000(0)+200,000(0.4)+(-120,000)(0.6)=8,000
[주 4] 300,000(0.6)+200,000(0.4)+(-120,000)(0)=260,000

설례 9.06 **협의의 불확실한 상황하의 의사결정** [경지1회]

* 자료는 [설례 9.05]를 참조함. 내년도의 경기확률을 전혀 알 수 없는 것으로 가정한다. 그러나 기대이익표는 변함이 없다.
* 다음과 같은 각종 준거에 의한 최적투자계획을 설명하라.
  (1) 라플라스 준거, (2) 맥시민 준거, (3) 맥시맥스 준거, (4) 유감 준거,
  (5) 후르비츠 준거 : ① $\sigma=0$, ② $\sigma=1$, ③ $\sigma=0.5$

해설

(1) 라플라스 준거

* 개개 가능한 상황에 대해 동일 확률을 부여해야 하므로 정상, 호황, 불황확률을 각각 1/3씩 부여함.
* 각 대안별 화폐적 기대값(EMV)은
  EMV(주식)=300,000(1/3)+200,000(1/3)+(-120,000)(1/3)=126,667원
  EMV(저축)=180,000원 (*)
  ∴ 저축을 선택

(2) 맥시민 준거

* 최소이익액을 비교하고, 이들 최소이익액 중에서 최대치를 가져오는 대안을 선택함.

대안	최소이익액
주식	-120,000
저축	180,000 (*)

→ ∴ 저축 선택

(3) 맥스맥스 준거

* 최대이익액을 비교하고, 이들 최대이익액 중에서 최대치를 가져오는 대안을 선택함.

대안	최대이익액
주식	300,000 (*)
저축	180,000

→ ∴ 주식 선택

(4) 유감 준거 (최소최대후회 준거)

* 일정한 상황 하에서 최대이익액과 나머지의 이익액과의 차액을 계산함으로써 유감의 액을 결정하고, 일단 유감표가 작성되면 최대유감을 극소화하는 대안을 선택함.

① 유감표의 작성

* 의사결정자가 저축행위를 선택했고, 호황이 발생했다면 이익액은 180,000원이 될 것임. 그러나 만일 그가 이 경우에 주식투자를 선택했다고 하면 이익액은 300,000원이 될 것임. 따라서 그 차액 120,000원은 저축행위를 선택함에 따른 유감의 액이 됨.
* 이와 같은 방식으로 유감의 액을 계산하면 표로 작성하면 다음과 같음.

[도표 9.3] 유감표

대안	호황	정상	불황
주식	0	0	300,000
저축	120,000	20,000	0

② 의사결정 → 개별대안의 최대유감액을 구한 후 최소치를 결정하면 다음과 같음.

대안	최대유감액
주식	300,000원
저축	120,000원 (*)

→ ∴ 저축을 선택

(5) **후르비츠 준거**

* 대안의 최대이익액과 낙관계수 σ를 곱하고, 최소이익액과 비관계수 $(1-\sigma)$를 곱해서 각 대안별 화폐예측치(EV)를 구하여, 이들 중 최대치를 선정함.

① 의사결정자가 완전히 비관적일 경우(σ=0일 경우)

σ=0이면 비관계수$(1-\sigma)$=1

EV(주식)=300,000(0)+(-120,000)(1)=-120,000원

EV(저축)=180,000(0)+180,000(1)=180,000원 (*)

∴ 저축 선택

② 의사결정자가 완전히 낙관적일 경우(σ=1일 경우)

σ=1이면 비관계수$(1-\sigma)$=0

EV(주식)=300,000(1)+(-120,000)(0)=300,000원 (*)

EV(저축)=180,000(1)+180,000(0)=180,000원

∴ 주식 선택

③ 의사결정자가 반은 낙관적이고, 반은 비관적일 경우

σ=0.5이면 비관계수$(1-\sigma)$=0.5

EV(주식)=300,000(0.5)+(-120,000)(0.5)=90,000원

EV(저축)=180,000(0.5)+180,000(0.5)=180,000원 (*)

∴ 저축 선택

설례 9.07 **게임이론 (Game Theory)** [경지1회]

(1) **게임이론의 의의**

* 의사결정을 필요로 하는 상황에는 "① 확실성, ② 위험, ③ 불확실성, ④ 상충"이 있는 바 게임이론은 상충하의 의사결정기법임.
* 게임이론은 지능적이고 목적달성을 위해 노력하는 경쟁자간의 경쟁상태를 모형화시키는 수리적 접근법으로서, 뉴만과 모겐스턴에 의해 고안되었음.

(2) 게임이론의 구성요소 및 가정

* 게임이론의 구성요소로는 ① 게임에 참가하는 경쟁자, ② 경쟁자의 전략, ③ 전략을 선택한 결과로서 발생하는 이익 등이 있음.

* 게임이론은 게임에 참가하는 모든 경쟁자는 상대방이 선택한 전략과 선택한 결과로서 발생하는 이익을 미리 알고 있다고 가정하며, 상대방이 어떠한 전략을 선택하더라도 자기의 이익을 최대화시킬 수 있는 전략을 선택한다는 것임.

(3) 게임이론의 종류

(가) 2인 게임, 다수 게임

* 게임은 경쟁자의 수에 따라 2인 게임, 다수 게임이 있음.

① 2인 게임 → 장기, 바둑 등과 같이 한 사람의 이익은 다른 사람의 손실을 초래하는 직접적인 경쟁상황임.

② 다수 게임 → 포커 등과 같이 한 사람의 이익이 반드시 다른 사람의 손실을 초래하지는 않는 간접적인 경쟁상황임.

(나) 영화(零和) 게임, 비영화(非零和) 게임

① 영화(zero-sum) 게임

* 영화(零和)라는 것은 상반된 이해관계를 가지는 2인 게임의 경우임.
* 한 사람의 이익은 다른 사람의 손실과 같아서, 두 경쟁자의 득실을 합치면 항상 0이 된다는 것임. 두 사람이 행할 때는 2인영화 게임임.

② 비영화(non zero-sum) 게임

* 장기의 예에서, 만일 패자가 장소대(자릿세)를 지불하는 경우 양자가 지불한 금액의 합계는 0이 되지 않는데 이런 경우를 비영화 게임이라고 함.

(4) 게임이론의 원리

* 여기서는 게임이론에서 가장 잘 발달되어 있는 2인0화 게임에 있어서의 원리를 고찰하여 보기로 함.

(가) 순수전략의 경우

* 각 경쟁자가 단 하나의 전략을 선택함으로써 서로 만족하여 안정상태에 도달할 수 있는 경우의 전략임.

① 2인0화 게임의 형성 → 2인의 경쟁자를 가정함. 각 경쟁자는 경쟁 상대방의 가능한 전략을 감안하여 자신에게 주어진 대체적 전략 중 하나를 선택함.

② 이익행렬 → 각 경쟁자는 각자에게 주어진 전략이 모든 가능한 조합으로부터 예측되는 이익에 관한 정보를 정확히 알고 있다고 가정하여 이익행렬을 작성함.

[도표 9.4] A, B의 이익행렬

		B의 전략		
		x	y	z
A의 전략	I	73	-32	71
	II	64	28	26

* 여기서 중요한 점은 위의 행렬에는 A의 이익만 포함되어 있다는 점임.
* 위의 예에서 A가 전략 Ⅰ을 택하고, B가 전략 x를 택할 시, A는 73원 이익, B는 73원 손실을 가져와 합이 0이 됨.
* (+)의 이익은 A의 이익을, (-)의 이익은 A의 손실을 나타냄.

③ 게임의 분석

㉮ 맥시민(이익을 위한) 또는 미니맥스(손실을 위한) 원리

* 게임분석에 이용되는 원리 중의 하나가 맥시민(이익을 위한) 또는 미니맥스(손실을 위한) 원리임.
* 이 원리는 의사결정자는 그가 선택하는 어떠한 전략에 대해서도 최악의 결과를 기대하는 비관적인 견해를 가진다고 가정함.
* 위의 예에서 A는 전략에 따라 예상되는 모든 최소이익으로부터 최대이익을 얻고자 하며(맥시민), B는 예상되는 모든 최대손실 중에서 최소손실을 얻고자 함(미니맥스).

㉯ 지배의 원리

* 어느 특정전략이 다른 전략보다 열등하기 때문에 그 우월한 전략에 의해서 완전히 지배당하게 되면 지배당한 전략(열등한 전략)은 이익행렬에서 제거될 수 있음.
  왜냐하면 지배당한 전략을 선택하지 않을 것이 분명하기 때문임.
* 이를 "**지배의 원리**"라 함.

④ 게임의 값

* 게임을 분석한 결과 각 경쟁자가 만족할 수 있는 전략을 선택함으로써 얻을 수 있는 값을 게임의 값이라 함.

⑤ 순수전략과 안점(鞍点)

* 각 경쟁자가 어떤 단 하나의 전략을 선택함으로써 서로 만족하여, 그 전략변경으로 인한 위험부담을 안지 않으려 할 때, 양자가 취하는 전략을 순수전략이라고 함.
* 순수전략에서 안정 혹은 균형 상태에 도달했을 때를 "**안점(鞍点)**"이라고 함.

(나) 혼합전략의 경우

① 의의 : 각 경쟁자들이 게임의 값을 얻기 위하여 여러 가지 전략을 적당한 비율로 혼합하는 전략임.

② 혼합전략의 해 : 대수해법, 도식해법의 2가지가 있음.

(5) **게임이론과 선형계획법의 유사점**

* 2인0화 게임은 선형계획법과 비슷한 점이 많으므로 선형계획법으로 바꿀 수 있음.

* 게임이론과 선형계획법의 유사점은 다음과 같음.

① 선형 목적함수 측면

* 게임에 참가하는 경쟁자들의 목적은 기대이익을 최대화하거나, 기대손실을 최소화하는 선형목적함수로 표시될 수 있음.
* 따라서, LP의 선형목적함수와 유사함.

② 선형제약 조건 측면

* 게임의 각 경쟁자는 이익행렬에 나타나는 전략적 이익, 손실에 따라 그에 따른 최적전략을 선택해 나가야 함.
* 따라서, LP의 제약조건을 만족시키면서 목적함수 최대화(또는 최소화) 추구와 유사.

③ 비부(非負)의 조건 측면

* 게임에서 각 경쟁자는 전략선택확률이 부(負, -)일 수 없음.
* 따라서, LP의 非負의 조건과 유사함.

④ 본원적 문제와 쌍대문제의 관계 측면

* 2인0화 게임에서 2명의 경쟁자가 모두 최적전략을 선택하는 경우에는 최대기대이익과 최소기대손실이 일치하게 됨.
* 따라서, LP의 본원적 문제와 쌍대문제와 유사함.

설례 9.08 **게임이론 - 순수전략**

* A와 B는 시장점유율 확보를 위해 경쟁하는 경쟁자들이다.
* 다음 [도표 9.5]는 개별경쟁자를 위한 모든 가능한 전략조합으로부터 나타나는 이익 중 경쟁자 A를 위한 이익을 나타낸다.

[도표 9.5] 경쟁자 A를 위한 이익 (시장점유율 : %로 기재됨)

		B의 전략		
		x	y	z
A의 전략	I	76	34	69
	II	64	31	26

(1) 맥시민(미니맥스)원리에 의하여 최적해를 구하라.

(2) 지배의 원리에 의하여 최적해를 구하라.

(3) 본문은 순수전략의 경우인가, 그 이유는?

해설

(1) 맥시민(또는 미니맥스)원리에 의한 최적해

* 맥시민(미니맥스)원리에 의하면 A는 전략에 따라 예상되는 모든 최소이익으로부터 최대이익(맥시민)을, B는 예상되는 모든 최대손실 중에서 최소손실(미니맥스)을 얻고자 함.

설례 9.09 **게임이론 : 순수전략 문제풀이 1**

* 다음과 같은 2인 영화게임을 고려한다.

A \ B	b_1	b_2
a_1	60	50
a_2	40	55

(1) 순수전략이 존재하는지 결정하라. (2) 경기자 A와 B의 전략사용 비율을 결정하라.
(3) 경기자들의 기대이득과 기대손실을 구하라. (4) 이 게임의 선형계획 모델을 작성하라.

해설

(1) 순수전략의 존재 여부 검토

A \ B	b_1	b_2	(이익)최소	최대최소
a_1	60	50	50	50
a_2	40	55	40	
(손실)최대	60	55		
최소최대		55		

* A가 a_1을 선택하고 B가 b_2를 선택할 것이나, B는 즉각 불만을 표할 것임.

A가 a_1을 선택시 B가 b_2(=55)에서 b_1(=40)으로 감소시킬 수 있기 때문에 안점이 존재하지 않으므로 순수전략은 존재하지 않음.

(2) 경기자 A와 B의 전략사용 비율

① 경기자 A의 전략사용 비율

$60p + 40(1-p) = 20p + 40$ .... ㉠

$50p + 55(1-p) = -5p + 55$ .... ㉡

* ㉠, ㉡식을 연립시켜서 풀면 $p=0.6$, $1-p=0.4$

* 경기자 A는 대안 a_1을 0.6, a_2를 0.4의 비율로 선택함.

② 경기자 B의 전략사용 비율

$60q + 50(1-q) = 10q + 50$ .... ㉢

$40q + 55(1-q) = -15q + 55$ .... ㉣

* ㉢, ㉣식을 연립시켜서 풀면 $q=0.2$, $1-q=0.8$

* 경기자 B는 대안 b_1을 0.2, b_2를 0.8의 비율 선택함.

(3) 경기자들의 기대이득과 기대손실

* 경기자 A의 기대이득(B가 b_1 선택시) : 60(0.6)+40(0.4)=52

* 경기자 B의 기대손실(A가 a_1 선택시) : 60(0.2)+50(0.8)=52

경기자 A의 기대이득=경기자 B의 기대손실

(4) 이 게임의 선형계획 모델 작성 (여기서, B를 위한 LP모형)

* B는 기대손실을 최소로 하는 전략을 조합함.
* B가 전략 b_1, b_2를 선택할 확률을 q_1, q_2라 하면, 기대손실은 게임의 값(V)보다 작아지도록 전략을 선택할 것임.

① $60q_1 + 50q_2 \leq V$, $40q_1 + 55q_2 \leq V$

② $\dfrac{60q_1}{V} + \dfrac{50q_2}{V} \leq 1$, $\dfrac{40q_1}{V} + \dfrac{55q_2}{V} \leq 1$

③ $y_1 = \dfrac{q_1}{V}$, $y_2 = \dfrac{q_2}{V}$ → $60y_1 + 50y_2 \leq 1$, $40y_1 + 55y_2 \leq 1$

④ $q_1 + q_2 = 1$ → $\dfrac{q_1}{V} + \dfrac{q_2}{V} = \dfrac{1}{V}$ → ∴ $y_1 + y_2 = \dfrac{1}{V}$

⑤ 목적함수 : 최대화 $Z = y_1 + y_2$

제약조건 : $60y_1 + 50y_2 \leq 1$, $40y_1 + 55y_2 \leq 1$

$y_1, y_2 \geq 0$

설례 9.10 **게임이론 - 혼합전략** [경지1회]

* 다음 [도표 9.8]은 어느 기업의 사장과 종업원대표 간의 임금인상 협상을 보여 준다.
* 이익행렬은 종업원대표(A)에게 이익을, 사장(B)에게 손실을 나타낸다.
* 종업원대표는 종업원의 이익을 최대화하고, 사장은 이러한 값(즉, 기업에 대한 손실)을 최소화하기를 원한다.

[도표 9.8] 종업원대표와 사장의 이익행렬

		B의 전략(사장)		
		y	z	A의 행최소이익
A의 전략 (종업원대표)	I	67	43	43
	II	51	58	51(최대)
B의 열최대손실		67	58 (최소)	

(1) 본문은 순수전략의 경우인가, 혼합전략의 경우인가, 그 이유는?

(2) 수식에 의하여 최적해를 구하라.

해설

(1) 전략의 종류 및 이유

* 본문은 게임을 위한 공통값, 즉 안점이 존재하지 않으므로 **혼합전략**을 선택함.
* 맥시민(미니맥스)원리에 의하면, A는 최소이익을 최대화하기 위하여 전략 II를 선택하고, B는 최대손실을 최소화하기 위해 전략을 z를 선택할 것임.

  그러나 B는 즉각 불만을 표시할 것임. 이는 A가 II를 선택시 B가 z에서 y로 이동함에 따라 그의 손실을 51로 감소시킬 수 있기 때문임. 따라서 B는 y를 선택함.

* B의 y에 대해 A는 Ⅰ을 선택하여 67의 이익을 얻으려 할 것임.
  A의 Ⅰ에 대해 B는 z를 선택하여 손실을 43으로 감소시키려 할 것임.
  그러면 다시 A는 원래의 Ⅱ로 되돌아가 순환을 계속하게 됨.
* 이와 같이 맥시민(미니맥스)원리에 의하면 두 사람은 언제나 불만에 차 있음.
  이러한 경우에는 균형이 나타나지 않으므로 A와 B가 게임의 값을 가지기 위해서는 혼합전략을 택해야 함.
* 혼합전략의 최적해는 수식이나 도표에 의해 구할 수 있음.

(2) 수식에 의한 해법 (대수해법)

① A의 경우

* A는 B가 y를 선택함으로써 발생하게 될 기대이익과 z를 선택함으로서 나타나게 될 기대이익을 동일하게 하는 방향에서 자기의 전략 Ⅰ과 Ⅱ를 사용하는 확률을 결정할 것임.
* 만일 A가 p' 확률로서 전략 Ⅰ을, $(1-p')$의 확률로서 전략 Ⅱ를 선택시
  ㉠ B가 y를 선택한다고 하면 A의 기대이익은 $p'(67)+(1-p')(51)$ 이 됨.
  ㉡ B가 z를 선택한다고 하면 A의 기대이익은 $p'(43)+(1-p')(58)$ 이 됨.
* 이제 B가 어떤 전략을 택하는 간에 A에게 무차별하기 위해서는 ㉠=㉡으로 하여
  $p'(67)+(1-p')(51)=p'(43)+(1-p')(58)$ 로부터
  $p'=0.226,\ \ 1-p'=0.774$ 가 됨.
  ∴ A는 22.6%의 확률로서 전략 Ⅰ을, 77.4%의 확률로서 전략 Ⅱ를 선택하면 B가 어떤 전략으로 나오든 간에 그의 기대이익은 동일하게 됨.
* 이 경우 A의 기대이익은
  ㉠ 만일 B가 y를 선택하면 → 0.226×67+0.774×51 = 54.6
  ㉡ 만일 B가 z를 선택하면 → 0.226×43+0.774×58 = 54.6

② B의 경우

* B도 A가 전략 Ⅰ을 선택함으로써 발생하게 될 기대손실과, 전략 Ⅱ를 선택함으로써 발생하게 될 기대손실을 동일하게 하도록 그의 y, z를 사용하는 확률을 결정할 것임.
* 만일 B가 p''의 확률로서 y를, $(1-p'')$의 확률로서 z를 취한다고 할 때, 이제 A가 어떤 전략을 택하든지 간에 B에게 무차별하기 위해서는
  $p''(67)+(1-p'')(43)=p''(51)+(1-p'')(58)$ 로부터
  $p''=0.484,\ \ 1-p''=0.516$ 이 됨.
  그러므로 B는 48.4%의 확률로서 y를, 51.6% 확률로서 z를 선택할 것임.
* 이 경우 B의 기대손실은
  ㉠ 만일 A가 전략 Ⅰ을 선택하면 → 0.484×67+0.516×43=54.6
  ㉡ 만일 A가 전략 Ⅱ을 선택하면 → 0.484×51+0.516×58=54.6

설례 9.11 게임이론 : 혼합전략 문제풀이

* 김 군은 지폐 25원짜리와 100원짜리 1장씩을 갖고 있고, 이 군은 지폐 5원짜리와 10원짜리 1장씩을 갖고 있다. 각자는 자기의 지폐 가운데 1장을 뽑는데 상대방이 무엇을 뽑았는지 전혀 모르는 상태에서 뽑게 된다.
* 만일 뽑은 두 지폐의 합한 금액이 홀수이면 이 군이 김 군의 돈을 취하고, 짝수이면 김 군이 이 군의 돈을 취한다.

(1) 이 게임을 위한 성과표 작성 2) 각자의 최적전략은 무엇인가? (3) 게임값은 얼마인가?

해설

(1) 게임을 위한 성과표. (2) 각자의 최적전략

* 안점이 존재하지 않으므로 혼합전략을 구사해야 함.

김군 / 이군	b_1 (25원)	b_2 (100원)	최소이득	최대최소이득
(a_1) 5원	$\boxed{-5}$	100	-5	-5
(a_2) 10원	25	-10	-10	
최대손실	25	100		
최소최대손실	25			

(3) 게임값

김군 / 이군		b_1	b_2
		q	$1-q$
a_1	p	-5	100
a_2	$1-p$	25	-10

이군 : $U_1=-5p+25(1-p)=-30p+25$

$U_2=100p-10(1-p)=110p-10$

$-30p+25=110p-10 \rightarrow p=0.25,\ 1-p=0.75$

$\therefore$ 게임값$=110(0.25)-10=17.5$

김군 : $V_1=-5q+100(1-q)=-105q+100$

$V_2=25q-10(1-q)=35q-10$

$-105q+100=35q-10 \rightarrow q=0.786,\ 1-q=0.214$

$\therefore$ 게임값 $=35(0.786)-10=17.5$

설례 9.12 **게임이론 - LP와 게임이론** [경지1회]

* 다음 [도표 9.9]는 경쟁자 A, B의 전략과 그에 따른 이익을 나타낸 이익행렬이다.

[도표 9.9] A, B의 이익행렬

		B의 전략	
		S	T
A의 전략	P	-3	7
	Q	6	1

(1) 이 문제를 선형계획(LP)법에 의한 모형으로 바꾸어 써라.
(2) 수식을 이용하여 이 게임문제를 풀어라.

해설

(1) LP의 모형

① A를 위한 LP 모형

* A가 전략 P, 전략 Q를 선택할 확률은 각각 X_1, X_2라 하면 $X_1 + X_2 = 1$이 됨.
* A는 B의 선택할 다양한 전략에 대응한 그의 기대이익을 최대화하려고 하므로 그의 기대이익이 게임의 값(V)보다 크거나 혹은 같도록 구체화할 것임(도표 9.9 참조).
* B의 다양한 전략에 대응하는 A의 기대이익

→ $-3X_1 + 6X_2 \geq V$, $7X_1 + X_2 \geq V$

* 이상의 게임문제를 비부의 조건을 추가한 LP 모형으로 고치면

$X_1 + X_2 = 1$ ………………………………………… ①

$-3X_1 + 6X_2 \geq V$ ……………………………… ②

$7X_1 + X_2 \geq V$ ……………………………………… ③

$X_1, X_2 \geq 0$

* LP의 부등식의 우변은 상수이어야 하므로 V를 제거하는 수리적 조작을 함.

$$\frac{X_1}{V} + \frac{X_2}{V} = \frac{1}{V},\quad \frac{-3X_1}{V} + \frac{6X_2}{V} \geq 1,\quad \frac{7X_1}{V} + \frac{X_2}{V} \geq 1$$

여기서, $\frac{X_1}{V} = X_1'$, $\frac{X_2}{V} = X_2'$ 라 두면

* A를 위한 LP 모형은

목적함수 : 최소화 $\frac{1}{V} = X_1' + X_2'$

제약조건 : $-3X_1' + 6X_2' \geq 1,\ \ 7X_1' + X_2' \geq 1,\ \ X_1',\ X_2' \geq 0$

* 이상의 A의 LP모형은 1/V을 최소화하는 것인데, 1/V을 최소화시킴으로써 V(게임값, 이익)을 최대화시킬 수 있는 것임.

② B를 위한 LP모형

* B는 기대손실을 최소화시킬 수 있도록 전략을 조합해야 함(도표 9.9 참조).

* 여기서 B가 전략 S와 T를 선택할 확률을 각각 Y_1, Y_2 라 하면, B를 위한 LP 모형은

목적함수 : 최소화 $\dfrac{1}{V} = Y_1' + Y_2'$

제약조건 : $-3Y_1' + 7Y_2' \le 1,\quad 6Y_1' + Y_2' \le 1,\quad Y_1',\ Y_2' \ge 0$

여기서, $Y_1' = Y_1 / V,\ Y_2' = Y_2 / V$

* 이상의 B의 LP모형은 1/V을 최대화시키는 것인데, 1/V을 최대화시킴으로써 V, 즉 손실을 최소화시킬 수 있는 것이 됨.

(2) 수식에 의한 해

* A가 전략 P, Q를 선택할 확률을 X_1, X_2, B가 전략 S, T를 선택할 확률을 Y_1, Y_2 라 하고, V를 게임값이라고 하면

$-3X_1 + 6X_2 = V$ ………………………………… ①

$7X_1 + X_2 = V$ ………………………………… ②

$-3Y_1 + 7Y_2 = V$ ………………………………… ③

$6Y_1 + Y_2 = V$ ………………………………… ④

$X_1 + X_2 = 1$

$Y_1 + Y_2 = 1$

또, $X_1,\ X_2,\ Y_1,\ Y_2 \ge 0$

① A의 경우

$X_1 + X_2 = 1$ 이므로 $X_2 = 1 - X_1$ …………… ⑤

* ⑤를 ①에 대입하면 $-3X_1 + 6(1 - X_1) = -9X_1 + 6 = V$
* ⑤를 ②에 대입하면 $7X_1 + (1 - X_1) = 6X_1 + 1 = V$
* 상기 두 식은 등식조건이 되므로 $-9X_1 + 6 = 6X_1 + 1 \ \rightarrow\ X_1 = \dfrac{1}{3}$

$\therefore\ X_1 = 1/3,\ X_2 = 2/3$ 이고, $V = 3$

② B의 경우

$Y_1 + Y_2 = 1$ 이므로 $Y_2 = 1 - Y_1$ 이 됨.

* 위와 같은 방법으로 계산하면 $-3Y_1 + 7(1 - Y_1) = -3Y_1 + 7 - 7Y_1 = -10Y_1 + 7 = V$
* 마찬가지로, $6Y_1 + (1 - Y_1) = 6Y_1 + 1 - Y_1 = 5Y_1 + 1 = V$
* 상기 두 식은 등식조건이 되므로 $-10Y_1 + 7 = 5Y_1 + 1 \ \rightarrow\ Y_1 = \dfrac{2}{5}$

$\therefore\ Y_1 = 2/5,\ Y_2 = 1 - 2/5 = 3/5,\quad V = 3$

* 이들로부터 $X_1,\ X_2,\ Y_1,\ Y_2$ 가 모두 정(+)이므로 이상의 해는 최적해가 됨.

★ 기출·예상 문제 및 착안점 ★

[Ⅰ] 경영지도사[생산관리분야-경영과학편] 제9장 기출문제

01 불확실성하의 의사결정과 위험하의 의사결정의 차이점 (10점) (경영지도사 2007년도)

☞ 힌트 : 제8장 본문 【설례 8.01】 위험한 상황하의 의사결정 해설 및 제9장 본문 【설례 9.02】 불확실한 상황하의 의사결정기법 해설 참조

02 불확실성하에서의 의사결정 기준 5가지를 쓰시오. (10점) (경영지도사 2010년도)

☞ 힌트 : 제9장 본문 『【설례 9.02】 불확실한 상황하의 의사결정기법』 해설 참조

03 게임이론 중 혼합전략시 기대값 계산 문제 (10점) (경영지도사 2011년도)

☞ 힌트 : 제9장 본문 『【설례 9.10】 게임이론 - 혼합전략』 해설 참조

04 불확실성 하에서 의사결정 방법 5가지 기준 작성 (10점) (경영지도사 2011년도)

* 괄호 채우기(비관, 낙관, 후르비츠, 라플라스, 유감 준거)

☞ 힌트 : 제9장 본문 『【설례 9.02】 불확실한 상황하의 의사결정기법』 해설 참조

[참고] 한국산업인력공단 시행 시험인 2013년도부터의 기출문제에 대한 해설은 제13장부터 최근 기출문제로서 별도로 정리·해설됨.

[Ⅱ] 경영지도사[생산관리분야-경영과학편] 제9장 예상문제

1. 공장관리기술사 [Operation Research편] 참조
   - ☞ CPEDU 아카데미(www.cpedua.com) 공장기술사 안내코너에 기출문제 게시중
   - ☞ 공장기술사 관련 기출문제를 분석후 본서 제9장 본문에 반영시켜 해설함

절대로 포기하지 말라!
절대로!
- 윈스턴 처칠 -