



제2장

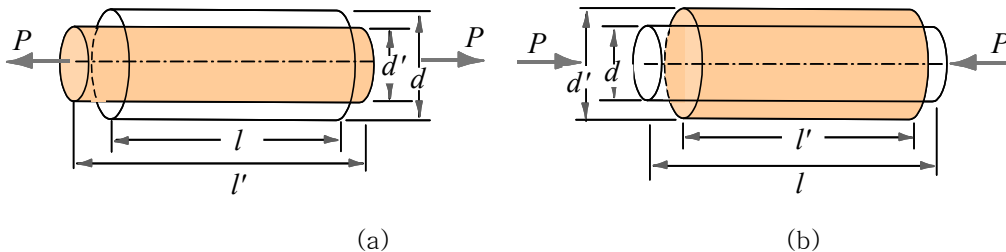
응력과 변형률

- 
1. 응력 / 2-02
 2. 변형률 / 2-06
 3. 응력-변형률 선도 / 2-10
 4. 후크(Hooke)의 법칙과 탄성계수 / 2-14
 5. 포아송 비 / 2-17
 6. 탄성계수 사이의 관계식 / 2-20
 7. 허용응력과 안전율 / 2-22
 8. 열응력 / 2-25
 9. 베어링 응력 / 2-28
 10. 응력집중 / 2-29
 11. 예상문제 풀이·해설 / 2-33
 12. 실전문제 풀이·해설 / 2-43
-

2. 변형률

2.1 수직변형률

- * 길이가 l 이고 지름 d 인 단면의 일정한 봉에 인장하중 P_t 를 받는 경우 [그림 2.3] (a)와 같이 축 방향으로 길이는 λ 만큼 늘어나고 축에 직각 방향은 λ' 만큼 줄어들었다.
- * 압축하중 P_c 를 받는 경우 [그림 2.3] (b)와 같이 축 방향으로 λ 만큼 줄어들고 축에 직각방향으로는 λ' 만큼 늘어나게 된다.
- * λ 와 λ' 를 변형량 또는 신장량이라 할 때 변형전의 길이와 변형량과의 비를 변형률(strain) 또는 신장률로서 ε 이라 정의한다.
- * 축 방향으로 인장하중을 받을 때 인장종변형률을 ε_t 이라 하고 (+)로 나타내며, 압축하중을 받을 때 압축종변형률을 ε_c 이라 하고 (-)로 표시할 때 이 변형률은 종변형률 또는 종신장률이라고 한다.
- * 축에 직각방향으로 인장하중을 받을 때 인장횡변형률을 ε'_t 이라 하고 (-)로 나타내며, 압축하중을 받을 때 압축횡변형률을 ε'_c 이라 하고 (+)로 표시할 때, 이 변형률은 횡변형률 또는 횡신장률이라고 한다.



[그림 2.3] 수직변형률

- * 인장변형률과 압축변형률을 수직변형률(normal strain)이라 하며 수직방향과 관계가 있다.

$$\varepsilon_t = \frac{l' - l}{l} = \frac{\lambda}{l}, \quad \varepsilon_c = \frac{l' - l}{l} = \frac{-\lambda}{l} \quad (2.4)$$

$$\varepsilon'_t = \frac{d' - d}{d} = -\frac{\delta}{d}, \quad \varepsilon'_c = \frac{d' - d}{d} = \frac{\delta}{d} \quad (2.5)$$

예제 2.6 길이 l 인 둥근 봉을 인장하여 20.1cm로 변화였다. 이때 종변형률을 0.005라고 하면 처음의 길이는 얼마인가?

해설

* 변형후의 길이를 l' 라고 하면 $\lambda = l' - l$ 을 이용한 $\varepsilon_t = \frac{\lambda}{l} = \frac{l' - l}{l}$ 에서 변형하여

$$l = \frac{l'}{\varepsilon_t + 1} = \frac{20.1}{0.005 + 1} = 20 \text{ cm}$$

예제 2.7 지름이 3cm이고 길이가 3m인 연강재 둥근 봉이 축방향으로 인장하중을 받아 길이가 0.21cm 늘어났고, 지름은 0.0009cm 줄어들었다. 이때 종변형률과 횡변형률을 구하시오.

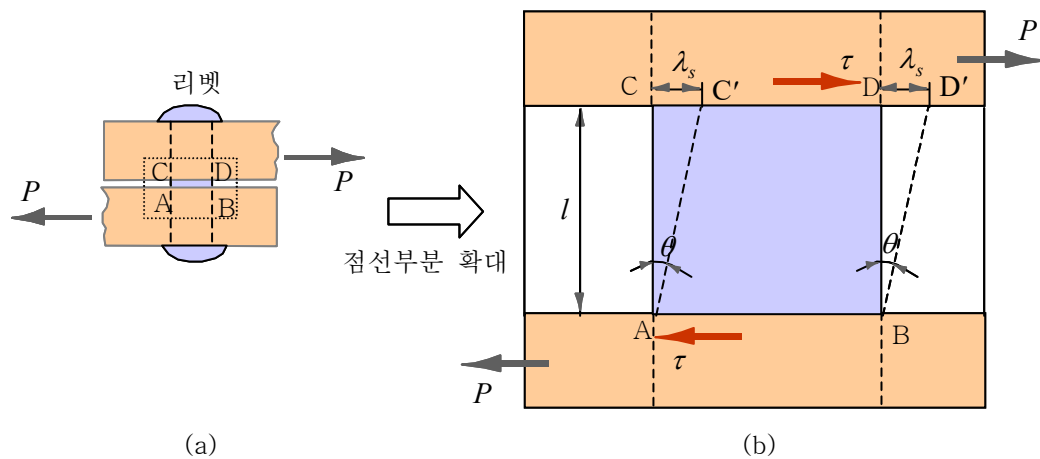
해설

* 종변형률 $\varepsilon_t = \frac{\lambda}{l} = \frac{0.21}{300} = 0.0007$

* 횡변형률 $\varepsilon'_t = -\frac{\delta}{d} = -\frac{0.0009}{3} = -0.0003$

2.2 전단변형률

* [그림 2-4] (a)에서 양 판재에 하중 P 가 작용하면 [그림 2-4] (b)와 같이 판재와 판재 사이의 리벳 부분의 확대면인 $\square ABCD$ 에 P 에 대응하는 전단응력 τ 가 작용하여 $\square ABC'D'$ 로 변형된다. 즉, 점 C는 점 C'으로, 점 D는 점 D'으로 변형되어 변형량 λ_s 만큼 미끄러지게 되며, 이 전단변형량 λ_s 와 길이 l 과의 비를 전단변형률(shearing strain)이라고 한다.



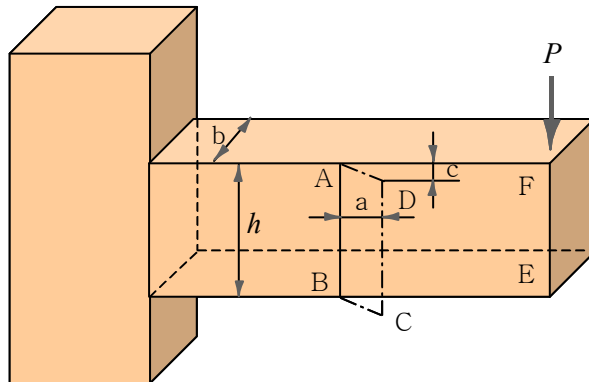
[그림 2.4] 전단변형률

* 전단변형률 γ 는 다음 식으로 표시할 수 있다.

$$\gamma = \frac{CC'}{AC} = \frac{\lambda_s}{l} = \tan \theta \approx \theta \quad (2.6)$$

- * θ 는 극히 작은 각이므로 CC'은 AC를 반지름으로 하는 원호를 생각하면 $\tan \theta$ 는 θ [rad]로 표시할 수 있다. 즉, $l=1$ 일 때 λ 값이 전단변형률이므로 단위거리에 있는 두 평행면 사이의 상호 가로 방향의 미끄럼값 또는 처음 직교하였던 두 면 사이의 각 변화를 radian으로 표시한 값을 전단변형률이라 할 수 있다.

예제 2.8 그림에서 높이 $h=6\text{m}$, 폭 $b=3\text{m}$ 이고, 하중 $P=15\text{kN}$ 을 작용하였다면 횡단면 AB면에 생기는 평균전단응력을 구하고, AB면과 CD면의 간극 $a=0.1\text{m}$ 이고, $c=0.1\text{mm}$ 만큼 변형되었다면 전단변형률을 구하시오.



해설

* 전단응력 $\tau = \frac{P}{A} = \frac{15000}{18} = 833.3 \text{ N/m}^2$

여기서, 전단 단면적 $A = bh = 6 \times 3 = 18 \text{ m}^2$

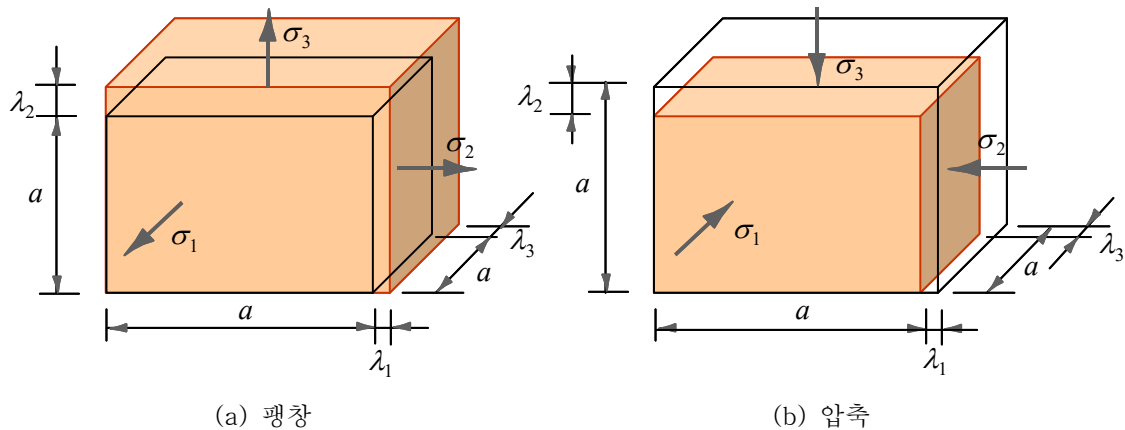
- * 전단변형률 γ 는 $\tan \theta \approx \theta$ 에 상당하는 $\angle DAF$ 이므로

$$\gamma = \tan \theta = \frac{c}{a} = 1 \times 10^{-3} \text{ (rad)} \quad (\text{또는 } 1 \times 10^{-3} \times \frac{180}{\pi} = 0.06^\circ)$$

2.3 체적변형률

- * 어떤 정육면체 주위에 높은 압력을 작용시키면 전체 표면에 압력이 작용하여 체적 V 가 V' 로 감소하게 된다.
- * 체적변화량 $\Delta V (=V-V')$ 와 본래 체적 V 와의 비를 체적변형률(volumetric strain, bulk strain)이라 하며, 이 체적변형률 ϵ_v 는 다음 식으로 표시할 수 있다.

$$\epsilon_v = \frac{V' - V}{V} = \frac{-(V - V')}{V} = \frac{-\Delta V}{V} \text{ (압축)}, \quad \frac{\Delta V}{V} \text{ (팽창)} \quad (2.7)$$



[그림 2.5] 팽창과 압축

* [그림 2.5]에서 한 변의 길이가 a 인 정육면체의 각 면에 수직응력 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 가 작용하여 각 변이 각각 $a \pm \lambda_1, a \pm \lambda_2, a \pm \lambda_3$ 로 변화하였다면 이 정육면체의 처음의 체적 $V = a^3$ 이고 변화 후 체적 $V' = (a \pm \lambda_1)(a \pm \lambda_2)(a \pm \lambda_3)$ 가 되어 체적변화량 ΔV 는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}\Delta V &= V' - V = (a \pm \lambda_1)(a \pm \lambda_2)(a \pm \lambda_3) - a^3 \\ &= a(1 \pm \varepsilon_1) \times a(1 \pm \varepsilon_2) \times a(1 \pm \varepsilon_3) - a^3 \\ &\approx \pm a^3(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)\end{aligned}\quad (2.8)$$

* ε 은 극히 작은 값으로 2차 이상의 항은 무시할 수 있다. 따라서, 체적변형률 ε_v 는

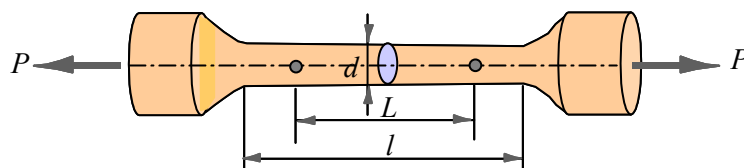
$$\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V} = \frac{\pm a^3(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)}{a^3} = \pm(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)\quad (2.9)$$

여기서, $(\pm)$ 에서 $(+)$ 는 팽창, $(-)$ 는 압축을 각각 의미함.

* 위의 식에서,

- ① 체적변형률은 세로변형률의 합과 같다.
- ② 등방성(等方性, isotropic) 재료인 경우 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$ 이므로 $\varepsilon_v \approx \pm 3\varepsilon$ 이 된다.

예제 2.9 다음 그림과 같이 KS 인장시험편에 3920N의 인장하중을 작용시켰더니 표점거리가 50.7mm, 지름이 13.84mm가 되었다. 이 시험편의 연신율과 단면수축률을 구하시오.
(단, 시험편의 표점거리 L : 50mm, 평행부 길이 l : 60mm, 지름 d : 14mm이다.)



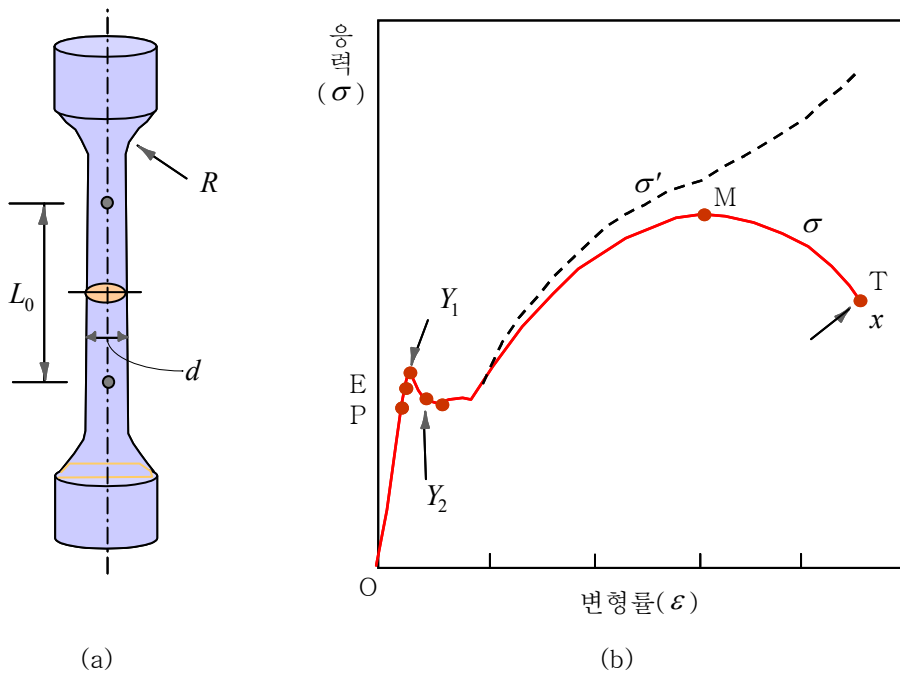
해설

* 연신율(=세로방향의 변형률) $\varepsilon = \frac{L' - L}{L} = \frac{50.7 - 50}{50} = 0.014$ (신장)

* 단면적 감소율 $\phi = \frac{A' - A}{A} = \frac{\frac{\pi d'^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4}}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{d'^2 - d^2}{d^2} = \frac{13.84^2 - 14^2}{14^2} = -0.0227$ (감소)

3. 응력-변형률 선도**3.1 응력-변형률 선도의 기초**

- * 봉재나 판재의 재료를 규정된 표준 시험편을 만들어 양쪽 끝을 고정하고 인장하중 P 를 작용하여 λ 만큼 늘어나는 시험 방법을 인장시험(tensile test)이라 하고, 그 재료에 기계적 성질을 파악하는 가장 대표적이고 중요한 시험이다.



[그림 2.6] 인장시험편과 응력-변형률 선도

- * [그림 2.6] (a)는 KS B 0801에 규정된 표준시험편의 하나로 평행부 사이의 표점거리가 하중에 의하여 변형된 관계를 하중-변위선도($P-\lambda$ 선도)라고 하며, 응력과 변형률 관계를 선도로 표시한 것을 응력-변형률선도($\sigma-\varepsilon$ 선도)라 한다.



제3장

인장, 압축 및 전단

- 
1. 단면이 일정한 부재 / 3-02
 2. 단면이 변하는 부재 / 3-07
 3. 자중을 고려한 부재 / 3-10
 4. 원환응력과 원통응력 / 3-17
 5. 인장, 압축 및 전단 탄성에너지 / 3-24
 6. 충격에 의한 변형 / 3-26
 7. 응력집중 / 3-29
 8. 예상문제 풀이·해설 / 3-33
 9. 실전문제 풀이·해설 / 3-44
-

1. 단면이 일정한 부재

1.1 단순한 인장 및 압축하중

* 수직 단면적 A 가 일정한 봉에 수직하중 P 가 작용하면 그 단면에는 일정한 수직응력이 생기고 전단응력은 생기지 않는다. 이와 같은 경우에 $\sigma = P/A$, $\varepsilon = \lambda/l$ 이므로 후크에 법칙을

적용하면 인장 또는 압축에 의한 변형량 λ 는 $\lambda = \frac{Pl}{AE}$ 이 된다.

* 또 지름 d 는 축 방향으로 인장이면 감소되며, 압축하면 증가하므로 그 변형량 δ 는 다음의 식으로 된다.

$$\delta = \varepsilon' d = \nu \varepsilon d = \nu \frac{\sigma}{E} d = \frac{\nu P d}{AE} \quad (3.1)$$

예제 3.1 지름이 2cm, 길이 2m인 원형 단면봉에 2000N의 인장하중을 작용하였을 때 길이의 신장량과 지름의 수축량을 구하시오. 단, 이 재료의 종탄성계수 $E=210\text{GPa}$ 이고, 포아송비는 0.3이다.

해설

* 길이의 신장량 $\lambda = \varepsilon l = 3.03 \times 10^{-5} \times 2000 = 0.0606 \text{ mm}$

$$\text{여기서, 종변형률 } \varepsilon = \frac{\sigma_t}{E} = \frac{6.37 \times 10^6}{210 \times 10^9} = 3.03 \times 10^{-5}$$

$$\text{단, 인장응력 } \sigma_t = \frac{P_t}{A} = \frac{P_t}{\pi d^2 / 4} = \frac{4 P_t}{\pi d^2} = 6.37 \text{ MPa}$$

* 지름의 수축량 $\delta = \varepsilon' d = \nu \varepsilon d = 0.3 \times 3.03 \times 10^{-5} \times 20 = 1.82 \times 10^{-4} \text{ mm}$

여기서, 포아송 비 $\nu = 0.3$

예제 3.2 주철재 중공 원통(pipe)의 두께가 $t=2.5\text{cm}$ 이다. 70kN의 압축하중을 작용하였을 때 이 파이프에 생기는 압축응력 σ_c 는 850N/cm^2 이다. 이 응력에 견딜 수 있는 파이프의 바깥지름 d_2 을 구하시오.

해설

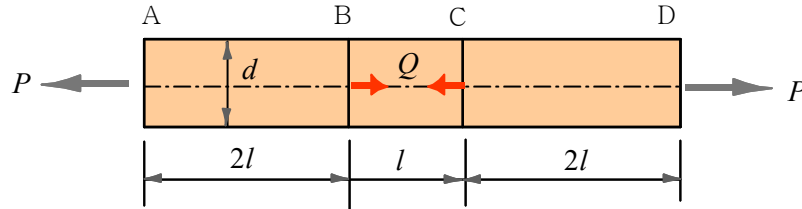
$$* A = \frac{\pi}{4} d_2^2 - \frac{\pi}{4} (d_2 - 2t)^2 = \pi t (d_2 - t) \rightarrow d_2 - t = \frac{A}{\pi t} \rightarrow d_2 - 2.5 = \frac{82.4}{\pi \times 2.5} = 10.5 \text{ cm}$$

$$\rightarrow d_2 = 13 \text{ cm}$$

$$\text{여기서, 축하중을 받는 파이프의 단면적 } A = \frac{P_c}{\sigma_c} = \frac{70000}{850} = 82.4 \text{ cm}^2$$

1.2 부재 중간에 작용하는 하중

- * [그림 3.1]과 같이 단면적이 A 인 부재의 양단에 인장하중 P 가 작용하고 부재 중앙에 하중 Q 가 화살표 방향으로 작용하고 있을 때 전체의 길이의 변화는 다음의 방법으로 구한다.



[그림 3.1] 부재 중간에 작용하는 하중

- * AB구간에서 힘은 평형이어야 하므로 이때 생기는 응력을 σ_1 , 신장량이 λ_1 일 경우

$$\sigma_1 = \frac{P}{A}, \quad \lambda_1 = 2 \frac{\sigma_1 l}{E} = \frac{2Pl}{AE} \quad (3.2)$$

$$[\text{참고}] \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \rightarrow \sigma = E\varepsilon \rightarrow \lambda = \frac{Pl}{AE} \quad (\text{단, } \sigma = \frac{P}{A})$$

- * CD구간에 힘도 평형이어야 하므로 이때 생기는 응력을 σ_3 , 신장량을 λ_3 로 할 경우

$$\sigma_3 = \frac{P}{A}, \quad \lambda_3 = 2 \frac{\sigma_3 l}{E} = \frac{2Pl}{AE} \quad (3.3)$$

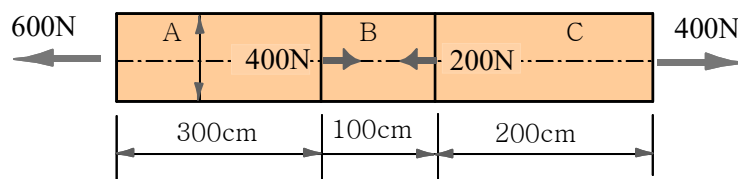
- * BC구간에서 생기는 응력을 σ_2 , 신장량을 λ_2 라고 할 때, BC구간의 절단면에 작용하는 힘도 평형상태이어야 하므로

$$\sigma_2 = \frac{P-Q}{A}, \quad \lambda_2 = \frac{(P-Q)l}{AE} \quad (3.4)$$

- * (a), (b), (c)에서 전 길이의 신장량 λ 는 $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ 이므로

$$\frac{2Pl}{AE} + \frac{(P-Q)l}{AE} + \frac{2Pl}{AE} = \frac{(5P-Q)l}{AE} \quad (3.5)$$

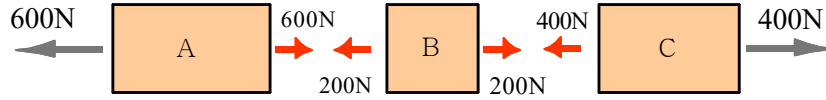
예제 3.3 그림과 같이 지름이 4cm인 강봉에 양끝과 임의의 지점에서 하중이 작용했을 때 이 봉의 전체 신장량을 구하시오. 단, 이 재료의 종탄성계수 $E=210\text{GPa}$ 이다.



해설

(1) 자유물체도

* 각 하중점에 대해 자유물체도를 그리면 그림과 같으며, 각 구간의 신장량을 $\lambda_A, \lambda_B, \lambda_C$ 라 하면,



(2) 전체 신장량 $\lambda = \lambda_A + \lambda_B + \lambda_C = 0.00106 \text{ cm}$

$$\text{여기서, } \lambda_A = \frac{P_A l_A}{AE} = \frac{P_A l_A}{(\pi d^2 / 4) \times E} = \frac{4 P_A l_A}{\pi d^2 E} = \frac{4 \times 600 \times 300}{\pi \times 4^2 \times 2.1 \times 10^7} = 0.00068 \text{ cm}$$

$$\lambda_B = \frac{P_B l_B}{AE} = \frac{P_B l_B}{(\pi d^2 / 4) \times E} = \frac{4 P_B l_B}{\pi d^2 E} = \frac{4 \times 200 \times 100}{\pi \times 4^2 \times 2.1 \times 10^7} = 0.00008 \text{ cm}$$

$$\lambda_C = \frac{P_C l_C}{AE} = \frac{P_C l_C}{(\pi d^2 / 4) \times E} = \frac{4 P_C l_C}{\pi d^2 E} = \frac{4 \times 400 \times 200}{\pi \times 4^2 \times 2.1 \times 10^7} = 0.0003 \text{ cm}$$

1.3 부정정 문제

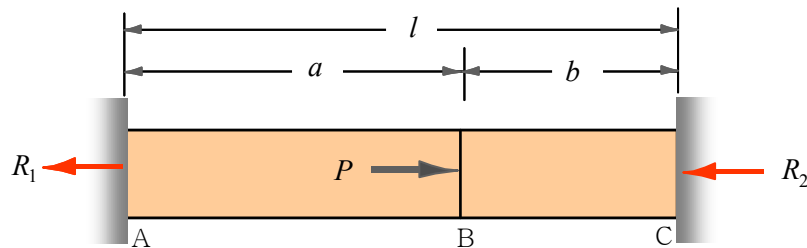
(1) 개념

- * 외부에서 물체에 작용하는 외력과 물체 내에 발생하는 내력을 힘의 평형조건을 고려하여 응력을 직접 구할 수 있는 문제들을 정정(靜定) 문제라 한다.
- * 한편, 힘의 평형조건식만으로 응력을 구할 수 없으며 변형에 관계한 조건까지 고려해야만 응력을 구할 수 있는 문제들을 부정정(不靜定) 문제라고 한다.

(2) 양단 고정봉의 축하중

- * [그림 3.2]와 같이 길이가 l 이고 단면적이 A 인 봉을 좌우 A, C 양단을 강체벽에 고정하고 중간 B 단면에 하중 P 를 축 방향으로 가했을 때 A와 C 단면에는 지지 반력 R_1, R_2 가 작용하여 수평방향의 힘 P, R_1, R_2 는 힘의 평형조건이 성립한다.

$$R_1 + R_2 = P \quad (3.6)$$



[그림 3.2] 양단 고정봉

- * 이때 AB 부분은 인장력 R_1 , BC 부분은 압축력 R_2 가 생기고 식 (3.6)으로 되며, 그 값을 구할 수 없다. 그러므로 AB 부분의 신장량과 BC 부분의 압축량을 각각 λ_1, λ_2 이라 하고, 지지 반력을 R_1, R_2 로 나타내면 다음의 식으로 된다.

$$\lambda_1 = \frac{R_1 a}{AE}, \quad \lambda_2 = \frac{R_2 (l-a)}{AE} \quad (3.7)$$

- * 양단이 고정되었기 때문에 신장량 λ_1 과 λ_2 의 합은 0이 되고, 서로 동일하다.

- * 그러므로 $\lambda_1 = \lambda_2$ 에서

$$R_1 a = R_2 (l-a) \quad (3.8)$$

이 되므로 식 (3.6)과 (3.8)로부터, R_1, R_2 에 대해 유도하면 다음과 같다.

$$R_1 = \frac{l-a}{l} P = \frac{Pb}{l}, \quad R_2 = \frac{Pa}{l} \quad (3.9)$$

- * 따라서 AB 부분의 인장응력 σ_1 과 BC 부분의 압축응력 σ_2 는 다음과 같다.

$$\sigma_1 = \frac{R_1}{A} = \frac{Pb}{Al}, \quad \sigma_2 = \frac{R_2}{A} = \frac{Pa}{Al} \quad (3.10)$$

- * 이와 같이 물체의 변형을 고려하지 않으면 응력을 구하지 못하는 문제를 부정정 문제라고 하며, 힘의 평형조건인 식 (3.6)과 변형 조건인 (3.8)은 미지의 반력 R_1, R_2 을 결정할 수 있는 조건식이다.

(3) 합성재료의 응력과 변형

- * [그림 3.3] (a)와 같이 길이가 같은 원주(圓柱)와 원통을 양단에서 강판으로 압축하중 P 를 가할 때 재료의 단면적과 종탄성계수를 각각 A_1, E_1 과, A_2, E_2 라 하면, 각 재료에 생기는 응력과 수축량 σ_1, λ_1 과 σ_2, λ_2 는 [그림 3.3] (b)와 같이 원주 및 원통에 압축하중 P_1, P_2 를 각각 받으며, 강판에 작용하는 힘은 평형상태이어야 하므로 다음과 같은 관계식이 성립된다.

$$P = P_1 + P_2 \quad (3.11)$$

- * 원주와 원통의 길이가 l 일 때 각각 수축량은 $\lambda_1 = \lambda_2$ 이므로, $\lambda = Pl / AE$ 에서

$$\frac{P_1}{A_1 E_1} = \frac{P_2}{A_2 E_2} \quad (3.12)$$

- * 식 (3.11)과 (3.12)로부터, P_1, P_2 에 대해 유도하면 다음 식과 같다.

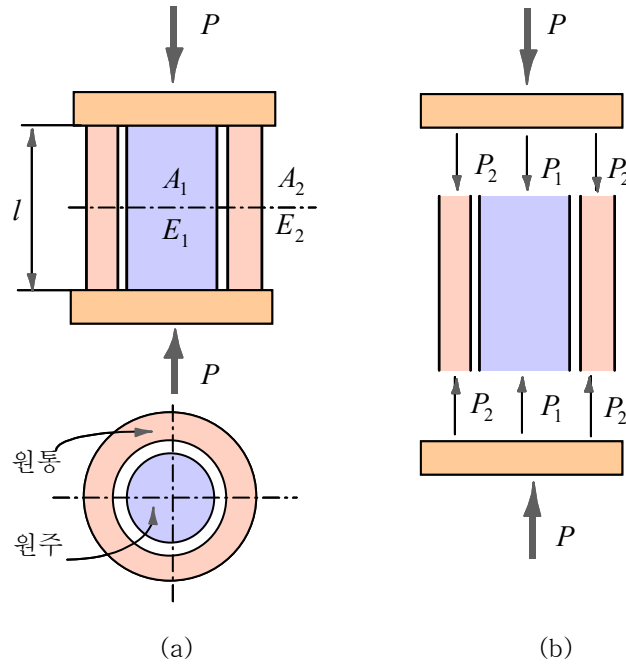
$$P_1 = \frac{A_1 E_1}{A_1 E_1 + A_2 E_2} P, \quad P_2 = \frac{A_2 E_2}{A_1 E_1 + A_2 E_2} P \quad (3.13)$$

* 그리고, 압축응력 σ_1, σ_2 는 다음 식과 같다.

$$\sigma_1 = \frac{E_1}{A_1 E_1 + A_2 E_2} P, \quad \sigma_2 = \frac{E_2}{A_1 E_1 + A_2 E_2} P \quad (3.14)$$

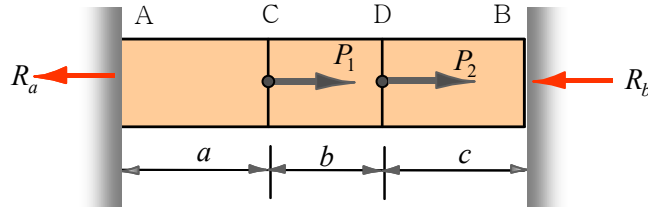
* 또한 $\lambda_1 = \lambda_2$ 이므로, 수축량 λ 는 다음 식과 같다.

$$\lambda = \frac{Pl}{A_1 E_1 + A_2 E_2} \quad (3.15)$$



[그림 3.3] 합성재료의 압축

예제 3.4 그림과 같이 양단을 강체 벽에 고정하고 봉 중간에 하중 $P_1 = 30 \text{ N}$, $P_2 = 40 \text{ N}$ 작용했을 때 벽에 작용하는 반력 R_a, R_b 를 구하시오. 단, $a=80\text{cm}$, $b=60\text{cm}$, $c=80\text{cm}$ 이다.



해설

(1) P_1 과 P_2 가 별도로 작용한다고 하면 (식 (3.9) 참조)

$$P_1 \text{ 만 작용했을 때 } R_{a_1} = \frac{P_1(b+c)}{a+b+c}, \quad R_{b_1} = \frac{P_1 a}{a+b+c}$$

$$P_2 \text{ 만 작용했을 때 } R_{a_2} = \frac{P_2 c}{a+b+c}, \quad R_{b_2} = \frac{P_2(a+b)}{a+b+c}$$

(2) 중첩의 원리에 의한 반력 산출

$$R_a = R_{a_1} + R_{a_2} = \frac{P_1(b+c) + P_2c}{a+b+c} = \frac{30(60+80) + 40 \times 80}{80+60+80} = 33.64 \text{ N}$$

$$R_b = R_{b_1} + R_{b_2} = \frac{P_1a + P_2(a+b)}{a+b+c} = \frac{30 \times 80 + 40(80+60)}{80+60+80} = 36.36 \text{ N}$$

예제 3.5 유효단면적 1600cm^2 인 콘크리트 기둥 속에는 지름 22mm 의 연강재 철근봉 9개가 원형으로 나열되어 박혀 있다. 콘크리트의 사용응력이 $\sigma_c=5\text{MPa}$ 일 때 이 기둥이 견딜 수 있는 하중을 구하시오.

(단, 콘크리트의 종탄성계수 $E_c=14\text{GPa}$, 연강의 종탄성계수 $E_s=210\text{GPa}$ 이다.)

해설

* 기둥에 가해지는 외력=콘크리트의 내력+연강재 철근봉의 내력

$$P = \sigma_c A_c + \sigma_s A_s$$

* 콘크리트의 수축량=연강재 철근봉의 수축량 $\rightarrow \frac{\sigma_c l}{E_c} = \frac{\sigma_s l}{E_s} \rightarrow \sigma_s = \sigma_c \times \frac{E_s}{E_c}$

* 견딜 수 있는 압축하중 $P = \sigma_c A_c + \sigma_s A_s = \sigma_c A_c + \left(\sigma_c \times \frac{E_s}{E_c} \right) A_s$

$$\begin{aligned} &= \sigma_c \left(A_c + \frac{E_s}{E_c} A_s \right) = 5 \times 10^6 \times \left(1600 \times 10^{-4} + \frac{210}{14} \times \frac{\pi}{4} \times 0.022^2 \times 9 \right) \\ &= 1.0565 \times 10^6 \text{ N} \approx 1056.5 \text{ kN} \end{aligned}$$

2. 단면이 변하는 부재

2.1 단불임 봉의 인장

* [그림 3.4]와 같이 길이 l , 지름 $2d$ 인 부분과 길이 $2l$, 지름 d 인 부분으로 된 단면적과 길이가 다른 단불임 봉에 인장하중 P 가 작용할 때 AB구간에 생기는 응력과 변형률이 σ_1, ε_1 이고, 횡단면적이 $4A$ (단, $A = \pi d^2 / 4$)이라 하면, 신장량 λ_1 은

$$\sigma_1 = \frac{P}{4A}, \quad \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} = \frac{P}{4AE} \text{ 이므로,}$$

$$\lambda_1 = \varepsilon_1 l = \frac{Pl}{4AE} \quad (3.16)$$

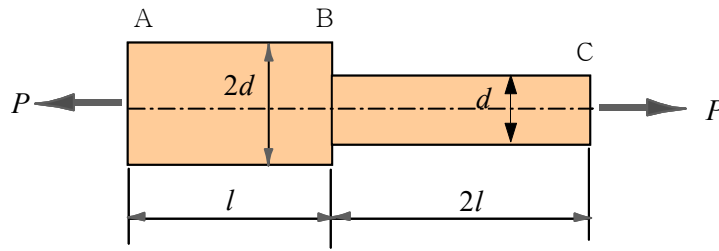
* 또 BC구간에 생기는 응력과 변형률이 σ_2, ε_2 이고, 횡단면적이 A 이면, 신장량 λ_2 는

$$\sigma_2 = \frac{P}{A}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} = \frac{P}{AE} \text{ 이므로,}$$

$$\lambda_2 = \varepsilon_2 (2l) = \frac{2Pl}{AE} \quad (3.17)$$

* 그러므로 전체 길이의 신장량 λ 는 식 (3.16), (3.17)에서 다음과 같이 된다.

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{Pl}{4AE} + \frac{2Pl}{AE} = \frac{9Pl}{4AE} \quad (3.18)$$

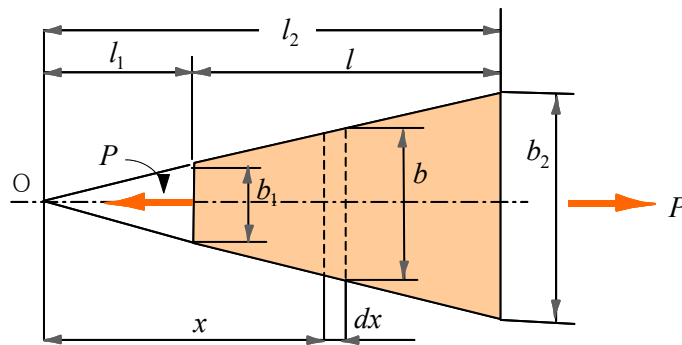


[그림 3.4] 단불임 봉

2.2 폭이 변하는 판의 인장

* 길이가 l 이고 두께가 t 인 연강판이 [그림 3.5]와 같이 폭이 b_1 에서 b_2 로 변화하고 인장하중 P 가 작용할 때 전체 길이의 신장량은 양변의 연장선에 교점 O를 원점으로 하고, O에서 x 거리와 미소길이를 dx 로 하고 그 때의 폭을 b , 횡단면적이 A 일 때 다음과 같이 된다.

$$b = b_2 \frac{x}{l_2}, \quad A = bt = \frac{tb_2}{l_2} x \quad (3.19)$$



[그림 3.5] 사다리형 판

* 미소길이 dx 부분에 생기는 응력과 변형률을 σ, ε 으로, 미소신장량을 $d\lambda$ 라고 하면

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{Pl_2}{tb_2} \times \frac{1}{x}, \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{Pl_2}{Etb_2} \times \frac{1}{x}$$

$$d\lambda = \varepsilon dx = \frac{Pl_2}{Etb_2} \times \frac{dx}{x}$$



비 틀 림

-
1. 축의 비틀림 / 6-02
 2. 전동축 / 6-08
 3. 비틀림에 의한 탄성에너지 / 6-12
 4. 원통형 코일스프링 / 6-16
 5. 예상문제 풀이·해설 / 6-19
 6. 실전문제 풀이·해설 / 6-27
-

* 단면적이 동일하므로 $\frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi}{4} (d_o^2 - d_i^2) = \frac{\pi}{4} d_o^2 (1 - x^2)$

$$\rightarrow \frac{d_o}{d} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0.5^2}} = 1.1547$$

* 중실축의 비틀림모멘트를 T_1 , 중공축의 비틀림모멘트를 T_2 라 하면

$$\alpha = \frac{T_2}{T_1} = \frac{\frac{\pi}{16} d_o^3 (1-x^4) \tau}{\frac{\pi}{16} d^3 \tau} = \left(\frac{d_o}{d} \right)^3 (1-x^4) = 1.443 \quad [\text{주의}] \ x \text{가 } x^3 \text{이 아닌 } x^4 \text{이다.}$$

* 즉, 같은 단면적으로서 중공축이 중실축보다 44.3%의 큰 비틀림모멘트를 전달.

[참고] 중공축의 비틀림응력 관계식 [주의] x^4 의 정리 과정에 유의

중공축의 바깥지름을 d_o , 안지름을 d_i , 축지름의 비를 $x = \frac{d_i}{d_o}$ 라 하면

$$T = Z_p \tau = \frac{\pi}{16 d_o} (d_o^4 - d_i^4) \tau = \frac{\pi d_o^3}{16} (1 - x^4) \tau \rightarrow \tau = \frac{16 T}{\pi d_o^3 (1 - x^4)}$$

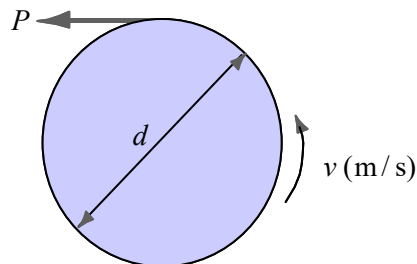
$$\text{여기서, } Z_p = \frac{I_p}{\frac{d_o}{2}} = \frac{\pi}{16 d_o} (d_o^4 - d_i^4) = \frac{\pi d_o^3}{16} \left(1 - \frac{d_i^4}{d_o^4} \right) = \frac{\pi d_o^3}{16} (1 - x^4)$$

$$\text{단, } I_p = \frac{\pi}{32} (d_o^4 - d_i^4) = \frac{\pi d_o^4}{32} \left(1 - \frac{d_i^4}{d_o^4} \right) = \frac{\pi d_o^4}{32} (1 - x^4)$$

2. 전동축

2.1 동력 전달

* 축은 외부로부터 가해지는 토크(torque)에 의하여 회전하는데, 이는 전동기로부터 축에 동력이 가해짐으로써 이루어진다.



[그림 6.5] 원형축에 의한 동력 전달

2.2 MKS 단위의 경우

[기지1회]

(1) 전달동력 구분

* 동력을 전달하는 축이 비틀림모멘트(평균 토오크) T (kgf·cm)를 받아 각속도 ω (rad/s)에 분당회전수 N (rpm)으로 회전하며, 전달력 P (kgf), 원주속도 v (m/s), 전달마력(=전달동력) H 라고 한다면, 전달동력을 구하는 식으로 다음의 2가지가 있다.

$$\text{전달동력 } H_{PS} : 1 \text{ PS} = 75 \text{ kgf} \cdot \text{m} / \text{s} = 0.7355 \text{ kW} = 0.7355 \text{ kJ} / \text{s}$$

$$[\text{참고}] 1 \text{ N} \cdot \text{m} / \text{s} = 1 \text{ W}, 1 \text{ PS} = 75 \text{ kgf} \cdot \text{m} / \text{s} = 735 \text{ N} \cdot \text{m} / \text{s}$$

$$H_{kW} : 1 \text{ kW} = 102 \text{ kgf} \cdot \text{m} / \text{s} = 1 \text{ kJ} / \text{s}$$

(2) 축지름 설계(H_{PS} 적용)

$$H_{PS} = \frac{Pv}{75} = \frac{Pr\omega}{75} = \frac{T\omega}{75 \times 100} = \frac{T}{75 \times 100} \times \frac{2\pi N}{60} = \frac{2\pi NT}{450000} \quad (6.14)$$

$$\text{토오크 } T = \frac{450000 H_{PS}}{2\pi N} = 71620 \frac{H_{PS}}{N} \text{ (kgf} \cdot \text{cm)} \quad (6.15)$$

$$* T = \tau Z_p = \tau \frac{\pi d^3}{16} = 71620 \frac{H_{PS}}{N} \text{ 이므로}$$

$$\text{축의 지름 } d = 71.5 \sqrt[3]{\frac{H_{PS}}{\tau N}} \text{ (cm)} \quad (\text{여기서, } \tau : \text{kgf} / \text{cm}^2) \quad (6.16)$$

(3) 축지름 설계(H_{kW} 적용)

$$H_{kW} = \frac{Pv}{102} = \frac{Pr\omega}{102} = \frac{T\omega}{102 \times 100} = \frac{T}{102 \times 100} \times \frac{2\pi N}{60} = \frac{2\pi NT}{612000} \quad (6.17)$$

$$\rightarrow \text{토오크 } T = \frac{612000 H_{kW}}{2\pi N} = 97400 \frac{H_{kW}}{N} \text{ (kgf} \cdot \text{cm)} \quad (6.18)$$

$$* T = \tau Z_p = \tau \frac{\pi d^3}{16} = 97400 \frac{H_{kW}}{N} \text{ 이므로}$$

$$\text{축의 지름 } d = 79.2 \sqrt[3]{\frac{H_{kW}}{\tau N}} \text{ (cm)} \quad (6.19)$$

(4) 축지름 설계(Bach 이론)

* 바흐(Bach)의 이론에 의하면 비틀림각 $\phi = \frac{1}{4} (^\circ/\text{m})$ 이내가 적당하고, $G = 8 \times 10^5 \text{ kgf} / \text{cm}^2$

일 때 강성도에 의한 축의 지름은 다음과 같다.

비틀림각 $\phi = \frac{Tl}{GI_p}$ (rad)이므로

① 축지름 설계(H_{ps} 적용)

$$\phi = \frac{Tl}{GI_p} \rightarrow \frac{1}{4} \times \frac{\pi}{180} \text{ (rad)} = \frac{\left(71620 \times \frac{H_{ps}}{N}\right) \times 100}{(8 \times 10^5) \times \frac{\pi d^4}{32}}$$

$$\rightarrow \text{이로부터, 강성도에 의한 축의 지름 } d = 12 \sqrt[4]{\frac{H_{ps}}{N}} \text{ (cm)} \quad (6.20)$$

② 축지름 설계(H_{kw} 적용)

$$\phi = \frac{Tl}{GI_p} \rightarrow \frac{1}{4} \times \frac{\pi}{180} \text{ (rad)} = \frac{\left(97400 \times \frac{H_{kw}}{N}\right) \times 100}{(8 \times 10^5) \times \frac{\pi d^4}{32}}$$

$$\rightarrow \text{이로부터, 강성도에 의한 축의 지름 } d = 13 \sqrt[4]{\frac{H_{kw}}{N}} \text{ (cm)} \quad (6.21)$$

* 강성도에 의하여 축의 지름을 계산하는 경우 G , N , H_{ps} (또는 H_{kw})가 주어지면 축의 지름 d 를 구할 수 있으며 강성도를 고려하지 않은 경우에는 강도에 의해서만 계산하고, 강성도를 고려한 경우에는 강성도와 강도를 계산하여 큰 쪽의 값을 취하는 것이 좋다.

2.3 SI단위의 경우

* 평균토크 T (N·m), 각속도 ω (rad/s), 분당회전수 N (rpm), 전달력 P (N), 원주속도 v (m/s), 전달마력 H (PS 또는 kW(=kJ/s=kN·m/s)라면

$$\text{전달동력(=전달마력)} = \text{전달력} \times \text{원주속도} \quad (6.22)$$

이므로, 다음의 관계식으로 정리된다.

$$H = Pv = P(\omega r) = (Pr)\omega = T\omega = T \times \frac{2\pi N}{60} = \frac{TN}{9.55} \quad (6.23)$$

$$\text{토크 } T = 9.55 \frac{H}{N} \quad (H = H_{ps} \text{ 또는 } H_{kw}) \quad (6.24)$$

$$= (9.55 \times 735) \frac{H_{ps}}{N} \text{ (N} \cdot \text{m)} \quad (6.25)$$

$$= (9.55 \times 1000) \frac{H_{kw}}{N} \text{ (N} \cdot \text{m)} \quad (6.26)$$

[참고] $1\text{N} \cdot \text{m} = 1\text{J}$, $1\text{N} \cdot \text{m/s} = 1\text{J/s} = 1\text{W}$, $1\text{HP} = 735\text{N} \cdot \text{m/s}$, $1\text{kW} = 1000\text{N} \cdot \text{m/s}$

* 축의 지름을 구하는 식으로서 다음의 2가지 방법이 사용된다.

$$\textcircled{1} \quad T = \tau Z_p = \tau \frac{\pi d^3}{16} = (9.55 \times 735) \times \frac{H_{PS}}{N} \text{ 이므로,}$$

$$\rightarrow \text{축의 지름 } d = 32.95 \sqrt[3]{\frac{H_{PS}}{\tau N}} \quad [\tau : \text{N/m}^2, H_{PS} : \text{PS (혹은 HP)}] \quad (6.27)$$

$$\textcircled{2} \quad T = \tau Z_p = \tau \frac{\pi d^3}{16} = (9.55 \times 1000) \times \frac{H_{kW}}{N} \text{ 이므로,}$$

$$\rightarrow \text{축의 지름 } d = 36.51 \sqrt[3]{\frac{H_{kW}}{\tau N}} \quad (\tau : \text{N/m}^2, H_{kW} : \text{kW}) \quad (6.28)$$

예제 6.7 회전수 150rpm에서 200HP를 전달하고 있는 연강재 중공축의 안지름과 바깥지름을 구하시오. (단, 안지름과 바깥지름의 비는 2/3이고, 비틀림각은 1개에 대하여 1/4도 이내로 하며, $G=83\text{GPa}$ 이다.)

해설

$$\text{* 비틀림각 } \phi = \frac{Tl}{GI_p} = \frac{Tl}{G \times \frac{\pi}{32} \left\{ d_2^4 - \left(\frac{2d_2}{3} \right)^4 \right\}} = \frac{Tl}{G \times \frac{\pi}{32} \times \frac{65}{81} d_2^4} \text{ 으로부터}$$

$$d_2^4 = \frac{Tl}{G \times \frac{\pi}{32} \times \frac{65}{81} \phi} = \frac{32 \times 81 \times Tl}{G \pi \times 65 \times \phi} = \frac{32 \times 81 \times 9359 \times 1}{(83 \times 10^9) \times \pi \times 65 \times \left(\frac{1}{4} \times \frac{\pi}{180} \right)} = 0.0003284$$

여기서, 축이 전달하는 마력과 비틀림모멘트와의 관계식에서,

$$T = (9.55 \times 735) \times \frac{H_{PS}}{N} = (9.55 \times 735) \times \frac{200}{150} = 9359 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\therefore \text{바깥지름 } d_2 = \sqrt[4]{0.0003284} = 0.1346 \text{ m} = 13.46 \text{ cm} = 13.5 \text{ cm}$$

$$\text{안지름 } d_1 = \frac{2}{3} d_2 = 9 \text{ cm}$$

예제 6.8 매분 300회전하고 있는 지름 5cm인 축이 있다. 길이 1m에 대하여 비틀림각 $\phi = 0.2^\circ$ 로 하면 이 축은 몇 마력을 전달하고 있는가? (단, $G=78.4\text{GPa}$ 이다.)

해설

$$\text{* 비틀림각 } \phi = 584 \times \frac{Tl}{Gd^4} \text{ 의 관계식 활용}$$

$$\rightarrow 0.2 = 584 \times \frac{(9.55 \times 735) \times \frac{H_{PS}}{300} \times 1}{(78.4 \times 10^9) \times 0.05^4} \rightarrow H_{PS} = 7.17 \text{ PS}$$

$$\text{여기서, } H = T \times \frac{2\pi N}{60} \rightarrow T = \frac{60H}{2\pi N} = 9.55 \times \frac{H}{N} = 9.55 \times 735 \times \frac{H_{PS}}{300} \text{ (N} \cdot \text{m)}$$

$$[\text{참고}] \quad 1 \text{ PS} = 735 \text{ N} \cdot \text{m} / \text{s}, \quad 1 \text{ kW} = 1000 \text{ N} \cdot \text{m} / \text{s}$$

예제 6.9 250rpm으로 83PS를 전달하는 축의 지름을 구하라. 재료의 허용전단응력은 12MPa이다. 또한, 중공축의 경우 바깥지름을 구하시오. $x = d_i / d_o = 1/2$ 이라고 한다.

해설

$$* \text{ 중실축 (SI단위인 경우) } d = 32.95 \times \sqrt[3]{\frac{H_{PS}}{\tau N}} = 32.95 \times \sqrt[3]{\frac{83}{12 \times 10^6 \times 250}} = 0.1 \text{ m} = 10 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} * \text{ 중공축 (SI단위인 경우) } d_o &= 32.95 \times \sqrt[3]{\frac{H_{PS}}{\tau N(1-x^4)}} \\ &= 32.95 \times \sqrt[3]{\frac{83}{12 \times 10^6 \times 250 \{1-(1/2^4)\}}} = 0.102 \text{ m} = 10.2 \text{ cm} \end{aligned}$$

예제 6.10 800rpm으로 200PS를 전달하는 축에서 허용전단응력 $\tau_a = 20\text{MPa}$ 이고, 허용비틀림각 $\phi_a = 1/4 (^{\circ} / \text{m})$ 이며, 전단탄성계수 $G = 78.4\text{GPa}$ 일 때 축의 지름을 구하시오.

해설

(1) H_{PS} 를 사용한 식으로서, 강도에 기반한 전동축 지름

$$d = 32.95 \sqrt[3]{\frac{H_{PS}}{\tau N}} = 32.95 \times \sqrt[3]{\frac{200}{20 \times 10^6 \times 800}} = 0.076 \text{ m} = 7.6 \text{ cm}$$

(2) Bach 식에 의한 강성도를 고려한 전동축 지름

$$d = 12 \sqrt[4]{\frac{H}{N}} = 12 \sqrt[4]{\frac{200}{800}} = 8.5 \text{ cm}$$

(3) 검토 : 축의 지름은 둘 중 큰 값인 $d = 8.5\text{cm}$ 를 선택한다.

3. 비틀림에 의한 탄성에너지

3.1 탄성에너지의 의미

* 비틀림을 받는 원형축은 비틀림모멘트, 즉 토오크에 의하여 생긴 에너지를 축 속에 저장시키며, 이 에너지를 변형률에너지 또는 탄성에너지라 한다.

* [그림 6.6]에서 표면에서의 최대전단응력을 $\tau_{\max}$ 이라고 하면, 그 내부에 있는 반지름 ρ 의 원주상의 임의의 점에 작용하는 전단응력 τ 는 다음과 같다.

제9장

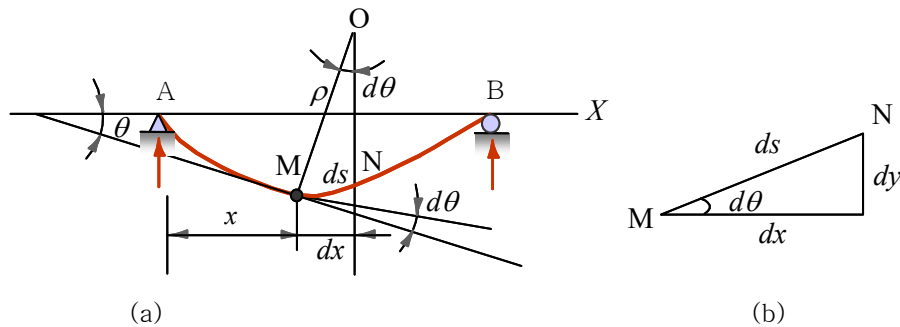
보의 처짐

-
1. 탄성곡선의 미분방정식 / 9-02
 2. 면적모멘트법 / 9-17
 3. 중첩법 / 9-29
 4. 굽힘으로 인한 탄성에너지 / 9-32
 5. 예상문제 풀이·해설 / 9-35
 6. 실전문제 풀이·해설 / 9-40
-

1. 탄성곡선의 미분방정식

1.1 처짐곡선의 방정식

- * 보에 횡하중이 작용하면 보의 축선은 구부러져 곡선으로 변형된다. 이 구부러진 중심선을 탄성곡선(elastic line) 또는 처짐곡선(deflection curve)이라 하고, 구부러지기 전의 곧은 중심선으로부터 이 탄성곡선까지의 수직변위를 처짐(deflection)이라 한다.



[그림 9.1] 보의 탄성곡선

- * 곡선의 곡률(curvature)은 순수굽힘의 곡률과 굽힘모멘트에 대한 관계식인 보 속의 저항모멘트 관계에 의하여, 미소거리 ds 사이의 임의의 요소에 있어서는 순수굽힘으로 가정하면 식 (9.1)이 성립된다.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (9.1)$$

- * [그림 9.1]에서 θ 는 X 축과 M점의 접선과 이루는 각을 나타내며, $d\theta$ 는 M과 N점에서의 그 곡선의 접선 또는 법선 사이의 각을 나타낸다.
- * 미소거리 ds 와 곡률반지름 ρ 사이의 관계식은 [그림 9.1] (a)에서 $ds = \rho d\theta$ 이므로 다음 식이 얻어진다.

$$\frac{1}{\rho} = \left| \frac{d\theta}{ds} \right| \quad (9.2)$$

- * 탄성영역 내에서 일반적인 보의 경우 지지점 사이의 거리에 비하여 곡률이 작으므로, 다음의 관계가 된다.

$$ds \approx dx, \quad \theta \approx \tan \theta = \frac{dy}{dx}$$

- * $\tan \theta = \frac{dy}{dx}$ 를 s 에 대하여 미분하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$\frac{d[\tan \theta]}{ds} = \sec^2 \theta \frac{d\theta}{ds}, \quad \frac{d}{ds} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2 y}{dx^2} \times \frac{dx}{ds} \quad [\text{참고}] \quad \frac{d \tan \theta}{d\theta} = \sec^2 \theta$$

$$\sec^2 \theta \frac{d\theta}{ds} = \frac{d^2 y}{dx^2} \times \frac{dx}{ds} \quad (9.3)$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\sec^2 \theta} \times \frac{d^2 y}{dx^2} \times \frac{dx}{ds} \quad (9.4)$$

$$[\text{참고}] \quad 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \rightarrow \sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \quad [\text{참고}] \text{ 이는 [그림 9.1] (b)로부터 구해진다.}$$

$$= \frac{dx}{dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \quad (9.5)$$

* 여기서, $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ 은 1에 비해 매우 작은 값으로 무시할 수 있으므로, 식 (9.5)는 $\frac{dx}{ds} \approx 1$, 그리

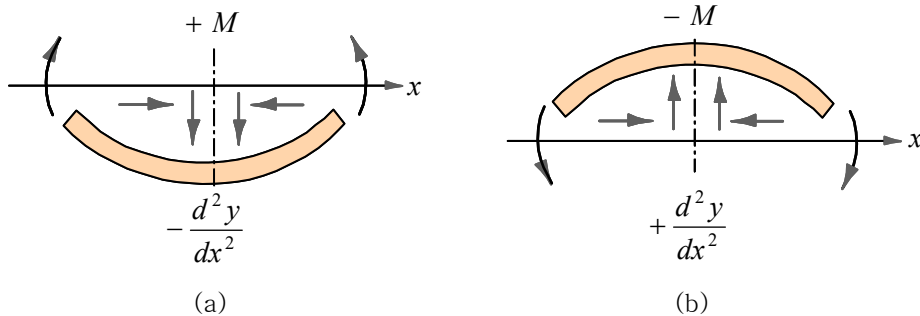
고 $\sec^2 \theta \approx 1$ 이 된다. 따라서, 식 (9.4)는 다음의 식으로 정리된다.

$$\frac{d\theta}{ds} = \left| \frac{1}{\rho} \right| = \frac{1}{\sec^2 \theta} \times \frac{d^2 y}{dx^2} \times \frac{dx}{ds} = \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (9.6)$$

* $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$ 의 관계에서, 다음의 식이 성립된다.

$$\pm \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (9.7)$$

* [그림 9.2] (a)와 같이 위로 오목한 곡선에서 기울기 $\frac{dy}{dx}$ 는 x 가 증가함에 따라 대수학적으로 감소하므로 $\frac{d^2 y}{dx^2}$ 는 (-)굽힘모멘트이고, 반대로 (b)와 같이 위로 볼록한 곡선에서는 기울기 $\frac{dy}{dx}$ 는 x 가 증가함에 따라 대수학적으로 증가하므로 $\frac{d^2 y}{dx^2}$ 는 (+)굽힘모멘트로서, $\frac{d^2 y}{dx^2}$ 의 부호는 M 의 부호가 항상 반대임을 알 수 있으므로, 다음의 식이 된다.



[그림 9.2] 굽힘모멘트의 부호 규약

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d^2 y}{dx^2} \quad (9.8)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad (9.9)$$

* 식 (9.9)는 대칭면 내에서 굽힘작용을 받는 보의 탄성곡선의 미분방정식 또는 처짐곡선의 미분방정식이 된다.

* 전단력으로 인한 처짐은 굽힘모멘트 M 으로 인한 처짐에 비해 미세한 값이므로 무시하고 순수굽힘이란 가정하에서 식 (9.9)를 응용한 w, V, M, θ, δ 식은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\text{하중 및 힘의 세기 : } w = -\frac{dV}{dx} = -\frac{d^2 M}{dx^2} = EI \frac{d^4 y}{dx^4} \quad (9.10)$$

$$\text{전단력 : } -V = -\frac{dM}{dx} = EI \frac{d^3 y}{dx^3} = \int w dx + C \quad (9.11)$$

$$\text{굽힘모멘트 : } -M = EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -\int V dx + C_0 \quad (9.12)$$

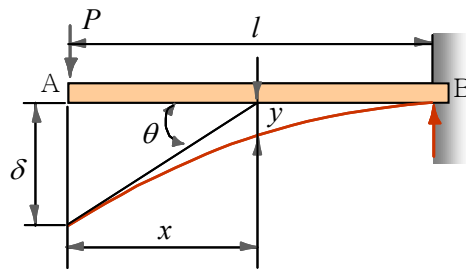
$$\text{처짐각 : } \theta = \frac{dy}{dx} = -\int \frac{M}{EI} dx + C_1 \quad (9.13)$$

$$\text{처짐량 : } y = \int \theta dx = -\int \int \frac{M}{EI} dx dx + C_1 x + C_2 \quad (9.14)$$

1.2 외팔보의 처짐

(1) 집중하중을 받는 경우

* 길이 l 인 외팔보의 자유단에 집중하중 P 를 받을 때 [그림 9.3]과 같다.



[그림 9.3] 자유단에 집중하중을 받을 때 외팔보의 처짐

(가) 굽힘모멘트

* 자유단으로부터 x 의 거리에 있는 임의의 단면에서의 굽힘모멘트 M 은 다음의 식이 된다.

$$M = -Px \quad \left(\text{또한 } -M = EI \frac{d^2 y}{dx^2} \text{의 관계} \right) \quad (9.15)$$

(나) 처짐의 식

* (가)항의 굽힘모멘트 식으로부터 $Px = EI \frac{d^2 y}{dx^2}$ 을 이용해 x 에 대해 두 번 적분하면, 다음의 식이 된다.

$$\int EI \frac{d^2 y}{dx^2} dx = \int Px dx + C_1 \rightarrow EI \frac{dy}{dx} = \frac{Px^2}{2} + C_1$$

$$\int EI \frac{dy}{dx} dx = \int \left(\frac{Px^2}{2} + C_1 \right) dx + C_2 \rightarrow EI y = \frac{Px^3}{6} + C_1 x + C_2$$

* 적분상수 C_1 과 C_2 를 구하기 위해 (경계)조건을 주면, $x=l$ (고정단)에서 기울기 $\frac{dy}{dx}=0$, 처짐량 $y=0$ 이므로, 다음의 관계로 구해진다.

$$EI \times 0 = \frac{Pl^2}{2} + C_1 \rightarrow C_1 = -\frac{Pl^2}{2}$$

$$EI \times 0 = \frac{Pl^3}{6} - \frac{Pl^2}{2} \times l + C_2 \rightarrow C_2 = \frac{Pl^3}{3} \text{ 이며}$$

* C_1 과 C_2 값을 상기의 적분 결과 식들에 대입하면, 다음의 식이 된다.

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{Px^2}{2} - \frac{Pl^2}{2} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{P}{2EI} (x^2 - l^2) \quad (9.16)$$

$$EI y = \frac{Px^3}{6} - \frac{Pl^2}{2} x + \frac{Pl^3}{3} \rightarrow y = \frac{P}{6EI} (x^3 - 3l^2 x + 2l^3) \quad (9.17)$$

(다) 처짐각과 처짐량

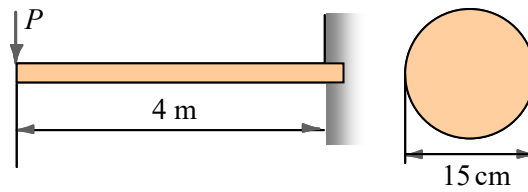
* $x=0$ (자유단)에서 최대처짐각(기울기) $\left(\frac{dy}{dx} \right)_{\max} = \theta$ 와 최대처짐량 $y_{\max} = \delta$ 가 일어나므로,

식 (9.16), (9.17)에서 다음의 식이 된다.

$$\text{최대처짐각 } \left(\frac{dy}{dx} \right)_{\max} = \theta = \frac{-Pl^2}{2EI} \quad (9.18)$$

$$\text{최대처짐량 } y_{\max} = \delta = \frac{Pl^3}{3EI} \quad (9.19)$$

예제 9.1 길이 4m 외팔보의 최대처짐량이 6.132cm였다면, 자유단에 작용하는 집중하중 P 를 구하시오. (단, $E=210\text{GPa}$ 이다.)



해설

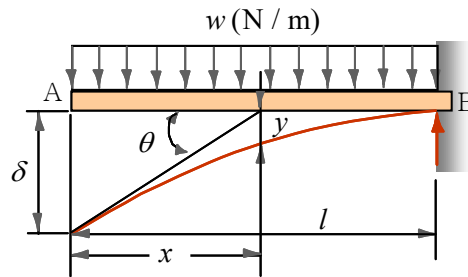
* 1개 집중하중을 받는 단순보의 최대처짐량 $\delta_{\max} = \frac{Pl^3}{3EI}$ 가 되므로,

$$P = \frac{3EI\delta_{\max}}{l^3} = \frac{3 \times (210 \times 10^9) \times (2.484 \times 10^{-5}) \times 0.06132}{4^3} = 14994 \text{ N} = 14.994 \text{ kN}$$

$$\text{여기서, } I = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi \times 0.15^4}{64} = 2.484 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

(2) 등분포 하중을 받는 경우

* 단위길이당 하중 $w(\text{N/m})$ 의 등분포(균일분포)하중을 받을 때 [그림 9.4]와 같다.



[그림 9.4] 등분포하중을 받을 때

(가) 굽힘모멘트

* 임의의 x 단면에서의 굽힘모멘트 M 은 다음의 식이 된다.

$$M = -\frac{wx^2}{2} \left(\text{또한 } -M = EI \frac{d^2y}{dx^2} \text{의 관계} \right) \quad (9.20)$$

(나) 처짐의 식

* (가)항의 관계로부터 $\frac{wx^2}{2} = EI \frac{d^2y}{dx^2}$ 를 이용하여 x 에 대하여 순차로 두 번 적분하면, 다음

의 식들이 된다.

$$\int EI \frac{d^2y}{dx^2} dx = \int \frac{wx^2}{2} dx + C_1 \rightarrow EI \frac{dy}{dx} = \frac{wx^3}{6} + C_1$$

$$\int EI \frac{dy}{dx} dx = \int \left(\frac{wx^3}{6} + C_1 \right) dx + C_2 \rightarrow EI y = \frac{wx^4}{24} + C_1 x + C_2$$

- * 적분상수 C_1 과 C_2 를 구하기 위해 (경계)조건을 주면, $x=l$ (고정단)에서 기울기 $\frac{dy}{dx}=0$, 처짐량 $y=0$ 이므로, 다음의 식들로 되고 계수가 구해진다.

$$EI \times 0 = \frac{wl^3}{6} + C_1 \rightarrow C_1 = -\frac{wl^3}{6}$$

$$EI \times 0 = \frac{wl^4}{24} - \frac{wl^3}{6} \times l + C_2 \rightarrow C_2 = \frac{wl^4}{8} \text{이며,}$$

- * C_1 과 C_2 값을 상기의 적분 결과 식들에 대입하면, 다음의 식들이 된다.

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{wx^3}{6} - \frac{wl^3}{6} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{w}{6EI} (x^3 - l^3) \quad (9.21)$$

$$EI y = \frac{wx^4}{24} - \frac{wl^3x}{6} + \frac{wl^4}{8} \rightarrow y = \frac{w}{24EI} (x^4 - 4l^3x + 3l^4) \quad (9.22)$$

(다) 처짐각과 처짐량

- * $x=0$ (자유단)에서 최대처짐각(기울기) $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\max} = \theta$ 와 최대처짐량 $y_{\max} = \delta$ 는 다음과 같다.

$$\text{최대처짐각 } \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\max} = \theta = \frac{-wl^3}{6EI} \quad (9.23)$$

$$\text{최대처짐량 } y_{\max} = \delta = \frac{wl^4}{8EI} \quad (9.24)$$

예제 9.2 전길이에 걸쳐 단위길이당 하중 8000N/m 의 등분포하중을 받는 외팔보가 자유단에서 처짐각 $\theta=0.007\text{rad}$, 처짐량 $\delta=2\text{cm}$ 이었다. 이 외팔보의 길이(l)를 구하시오.
(단, $E=210\text{GPa}$ 이다.)

해설

- * 등분포하중을 받는 외팔보의 최대처짐량 $\delta_{\max} = \frac{wl^4}{8EI} = \frac{l}{8} \times \left(\frac{wl^3}{EI}\right)$ 으로부터

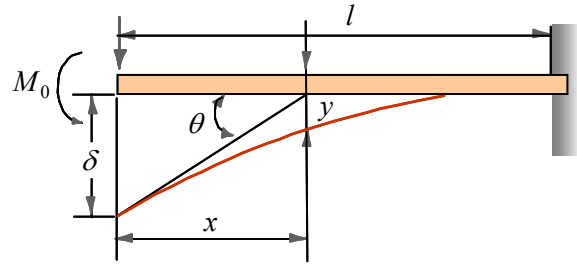
$$l = \delta_{\max} \times 8 \times \left\{ 1 / \left(\frac{wl^3}{EI} \right) \right\} = 0.02 \times 8 \times \frac{1}{0.042} = 3.8095 \approx 3.81 \text{ m}$$

여기서, $w=8000 \text{ N/m}$, $\theta(\theta_{\max})=0.007 \text{ rad}$, $\delta=0.02 \text{ m}$, $E=210 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ 이고

등분포하중을 받는 외팔보의 최대처짐각 $\theta_{\max} = \frac{wl^3}{6EI}$ 으로부터

$$\frac{wl^3}{EI} = 6\theta_{\max} = 6 \times 0.007 = 0.042$$

(3) 우력을 받는 경우

[그림 9.5] 우력 M_0 를 받는 외팔보의 처짐

(가) 굽힘모멘트

* [그림 9.5]와 같이 외팔보의 자유단에 우력(moment) M_0 가 작용할 때 보의 축방향에서 굽힘모멘트가 일정하면, 임의의 단면 x 에서의 굽힘모멘트 M 은 다음의 식이 된다.

$$M = -M_0 \quad \left(\text{또한 } -M = EI \frac{d^2 y}{dx^2} \text{의 관계} \right) \quad (9.25)$$

(나) 처짐의 식

* (가)항의 굽힘모멘트 식 $M_0 = EI \frac{d^2 y}{dx^2}$ 를 이용해 x 에 대해 두 번 적분하면, 다음의 식들이 된다.

$$\int EI \frac{d^2 y}{dx^2} dx = \int M_0 dx + C_1 \rightarrow EI \frac{dy}{dx} = M_0 x + C_1$$

$$\int EI \frac{dy}{dx} dx = \int (M_0 x + C_1) dx + C_2 \rightarrow EI y = \frac{M_0 x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

* 적분상수 C_1 과 C_2 를 구하기 위해 (경계)조건을 주면, $x=l$ (고정단)에서 기울기 $\frac{dy}{dx} = 0$, 처

짐량 $y=0$ 이므로, 다음의 식에서 계수들이 구해진다.

$$EI \times 0 = M_0 l + C_1 \rightarrow C_1 = -M_0 l$$

$$EI \times 0 = \frac{M_0 l^2}{2} - M_0 l \times l + C_2 \rightarrow C_2 = \frac{M_0 l^2}{2} \text{이며,}$$

* C_1 과 C_2 값을 상기의 적분 결과 식들에 대입하면, 다음의 식들이 된다.

$$EI \frac{dy}{dx} = M_0 x - M_0 l \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{M_0}{EI} (x - l) \quad (9.26)$$

$$EI y = \frac{M_0 x^2}{2} - M_0 l x + \frac{M_0 l^2}{2} \rightarrow y = \frac{M_0}{2EI} (x^2 - 2lx + l^2) \quad (9.27)$$

(다) 처짐각과 처짐량

* $x=0$ (자유단)에서 최대처짐각(기울기) $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\max} = \theta$ 와 최대처짐량 $y_{\max} = \delta$ 가 일어나므로

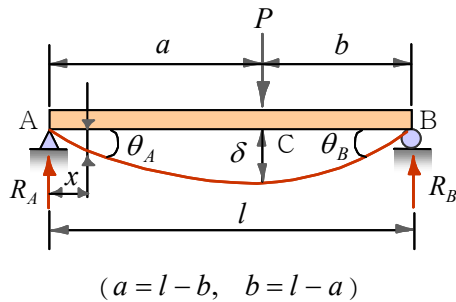
다음의 식이 된다.

$$\text{최대처짐각 } \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\max} = \theta = \frac{-M_0 l}{EI} \quad (9.28)$$

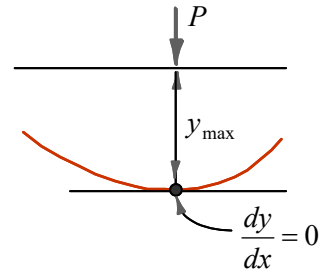
$$\text{최대처짐량 } y_{\max} = \delta = \frac{M_0 l^2}{2EI} \quad (9.29)$$

1.3 단순보의 처짐

(1) 집중하중을 받는 경우



(a)



(변곡점에서 기울기=0)

(b)

[그림 9.6] 집중하중을 받는 단순보의 처짐

(가) 굽힘모멘트

* 양단지지의 단순보(simple beam) AB에서 C에 집중하중 P 가 작용할 때 임의의 단면 x 에서의 굽힘모멘트 M 은 다음의 식들이 된다.

a 구간 : $0 < x < a$ 에서,

$$M = R_A x = \frac{Pb}{l} x \quad \left(\text{또한 } -M = EI \frac{d^2 y}{dx^2} \text{의 관계} \right) \quad (9.30)$$

b 구간 : $a < x < l$ 에서,

$$M = \frac{Pb}{l} x - P(x - a) \quad \left(\text{또한 } -M = EI \frac{d^2 y}{dx^2} \text{의 관계} \right) \quad (9.31)$$

(나) 처짐곡선의 방정식

(a) 처짐곡선 방정식 유도

a 구간 : $0 < x < a$ 에서, 다음의 관계식이 된다.